SEMINAR

PROSTI PAD OB UPOŠTEVANJU ZRAČNEGA UPORA

FIZIKA 1

Klemen Ritlop
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Geodezija in geoinformatika, 1. letnik

Kranj, 15. 10. 2009

Če prosti pad obravnavamo brez vpliva zračnega upora, veljajo enačbe enakomerno pospešenega gibanja:

$$v = v_0 - gt,$$

$$h = h_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

$$v^2 = {v_0}^2 - 2gh,$$

kjer je *g* težni pospešek, *h* trenutna višina in h_0 začetna višina prostega pada. Seveda pa vsi vemo, da predmeti pri prostem padu ne dosegajo neomejenih hitrosti, ampak pospešujejo do določene hitrosti, nato pa se gibajo s konstantno hitrostjo (če zanemarimo, da se z višino spreminja gostota zraka). Končno hitrost predmet doseže, ko je rezultanta vseh sil na telo enaka nič. Se pravi, sila upora mora biti enaka sili teže:

$$F_g = m \cdot g = m \cdot a = F_u.$$

Pojemek prostega pada a' zaradi upora zraka pa je odvisen od trenutne hitrosti predmeta *v* in koeficienta α (ta je odvisen od oblike telesa, njegove velikosti in mase ter gostote tekočine skozi katero telo pada). Velja:

$$a' = \alpha v^2.$$

V vsakem trenutku velja, da je pospešek enak:

$$a = g - a',$$

$$a = g - \alpha v^2.$$

Vzemimo primer dežne kaplje. Zanima nas po kolikšnem času ta doseže maksimalno hitrost in za koliko pade proti tlom v tem času. Za dežno kapljo s premerom 4 mm je α=0.12/m. Najprej izračunamo kako se hitrost spreminja s časom:

$$a = \frac{dv}{dt} = g - \alpha v^2,$$

$$dt = \frac{1}{g - \alpha v^2} dv,$$

$$\int_0^t dt = \int_0^v \frac{1}{g - \alpha v^2} dv,$$

$$t = \frac{arctanh\left(v\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\right)}{\sqrt{\alpha g}}.$$

Iz enačbe izrazimo v in dobimo:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\tanh\left(t\sqrt{g\alpha}\right).$$

Pogledamo limito izraza, ko gre $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\tanh\left(t\sqrt{g\alpha}\right) = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}. \qquad (1)$$

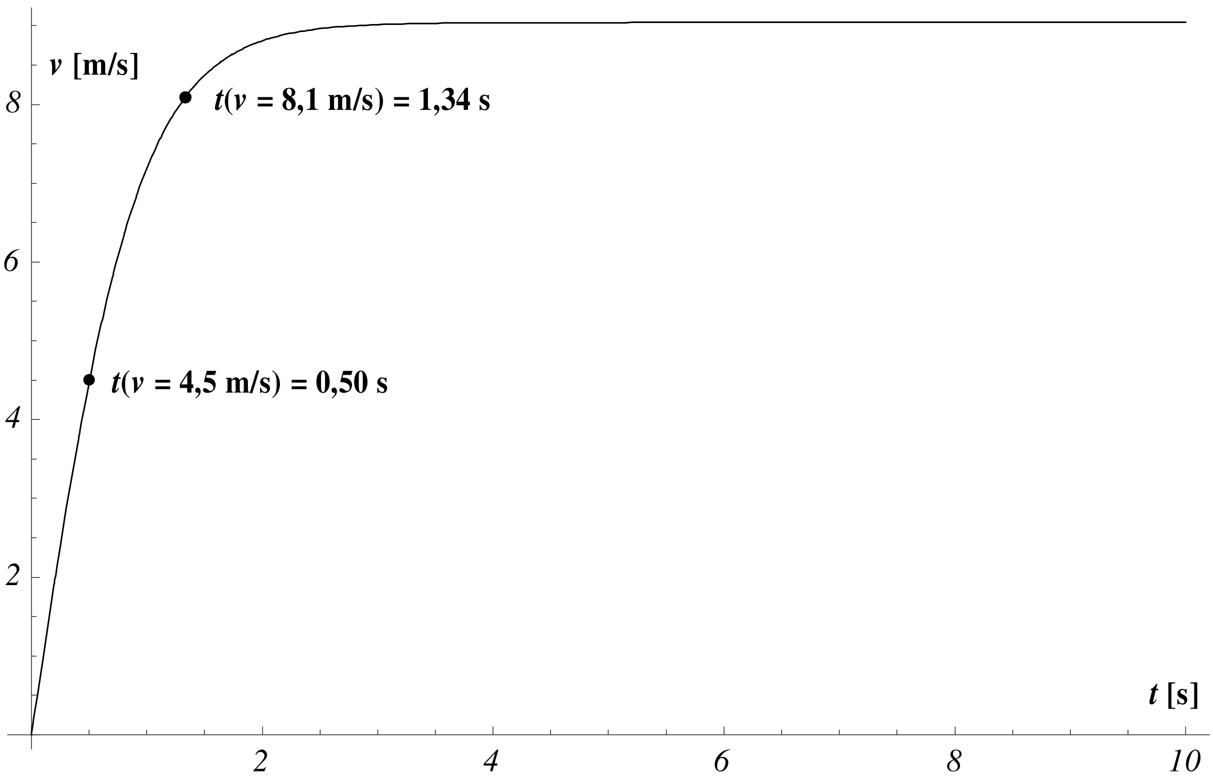
Vidimo, da je hitrost po dovolj dolgem času res konstantna. Če vstavimo podatke, dobimo, da je končna hitrost kaplje enaka približno 9 $\frac{m}{s}$.

Izračunajmo še, po kolikšnem času kaplja doseže 50% in 90% hitrosti:

$$t = \frac{arctanh\left(v\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\right)}{\sqrt{\alpha g}};$$

$$t\left(v = 4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 0{,}50\ \mathrm{s},$$

$$t\left(v = 8{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 1{,}34\ \mathrm{s}.$$



Graf 1: Hitrost kaplje v odvisnosti od časa

Zanima nas tudi, na kolikšni poti kaplja doseže to hitrost:

$$a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = g - \alpha v^2,$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = g - \alpha v^2,$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = g - \alpha v^2,$$

$$\int_0^x dx = \int_0^v \frac{v}{g - \alpha v^2} dv,$$

$$x = -\frac{\ln\left(\frac{g - v^2\alpha}{g}\right)}{2\alpha},$$

$$-2x\alpha = \ln\left(1 - \frac{v^2\alpha}{g}\right),$$

$$e^{-2x\alpha} = 1 - \frac{v^2\alpha}{g},$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{g(1 - e^{-2x\alpha})}{\alpha}}.$$

Tudi tukaj lahko pogledamo limitni primer za velike razdalje:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{g(1 - e^{-2x\alpha})}{\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}.$$

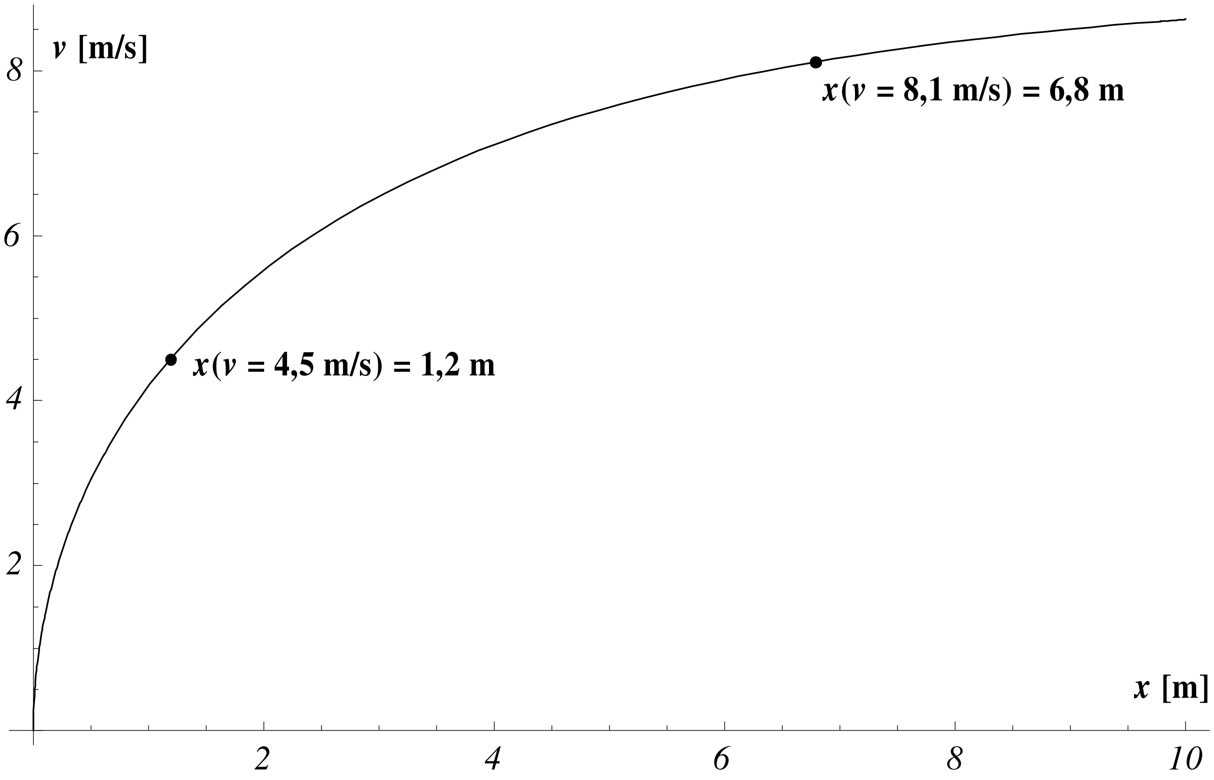
Po pričakovanju je največja hitrost enaka rezultatu (1).

Zračunajmo še, po koliko metrih padanja kaplja doseže 50% oz. 90% končne hitrosti.

$$x = -\frac{\ln\left(\frac{g - v^2\alpha}{g}\right)}{2\alpha};$$

$$x\left(v = 4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 1{,}2\ \mathrm{m},$$

$$x\left(v = 8{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 6{,}8\ \mathrm{m}.$$



Graf 2: Hitrost kaplje v odvisnosti od poti

Kot zanimivost si poglejmo še s kolikšne višine mora vrana spustiti oreh na beton oz. asfalt, da mu poči lupina. Najprej ocenimo, s kakšno hitrostjo mora kamen pasti na tla, da lupina poči. S poskusom sem ugotovil, da orehova lupina poči, če nanjo pade kamen z maso 1 kg z višine 4 cm. Pri padcu je sprememba potencialne energije kamna:

$$\Delta W_p = W_{pk} - W_{pz} = 0 - mgh = -0{,}4\ \mathrm{J}.$$

Predpostavimo, da se 80% energije porabi za trenje oreha, torej rabimo 0,32 J energije, da lupina poči. Ko pade oreh z maso 10 g na tla, je sprememba njegove kinetične energije enaka:

$$\Delta W_k = W_{kk} - W_{kz} = 0 - \frac{mv^2}{2} = -0{,}005\ \mathrm{kg} \cdot v^2.$$

Ker trk ni idealno neprožen, recimo, da se za trenje lupine porabi 60% oddane kinetične energije. Torej velja:

$$0{,}005\mathrm{kg} \cdot v^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}32\ \mathrm{J},$$

$$v = 11\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Sedaj vemo, da mora oreh na tla prileteti s hitrostjo okrog 11 m/s, da mu poči lupina. Vemo pa tudi, kako je hitrost odvisna od višine. Oceniti moramo še koeficient α za orehovo lupino.

Kot sem že omenil je ta odvisen od oblike telesa, njegove velikosti in mase ter gostote kapljevine skozi katero telo pada. Recimo, da ima oreh maso 10 g in polmer 1,5 cm. Velja enačba

$$\alpha = \frac{\rho \cdot C_d \cdot S}{2 \cdot m}.$$

$\rho - gostota\ zraka = 1{,}2\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$C_d - koeficient\ upora = 0{,}47$

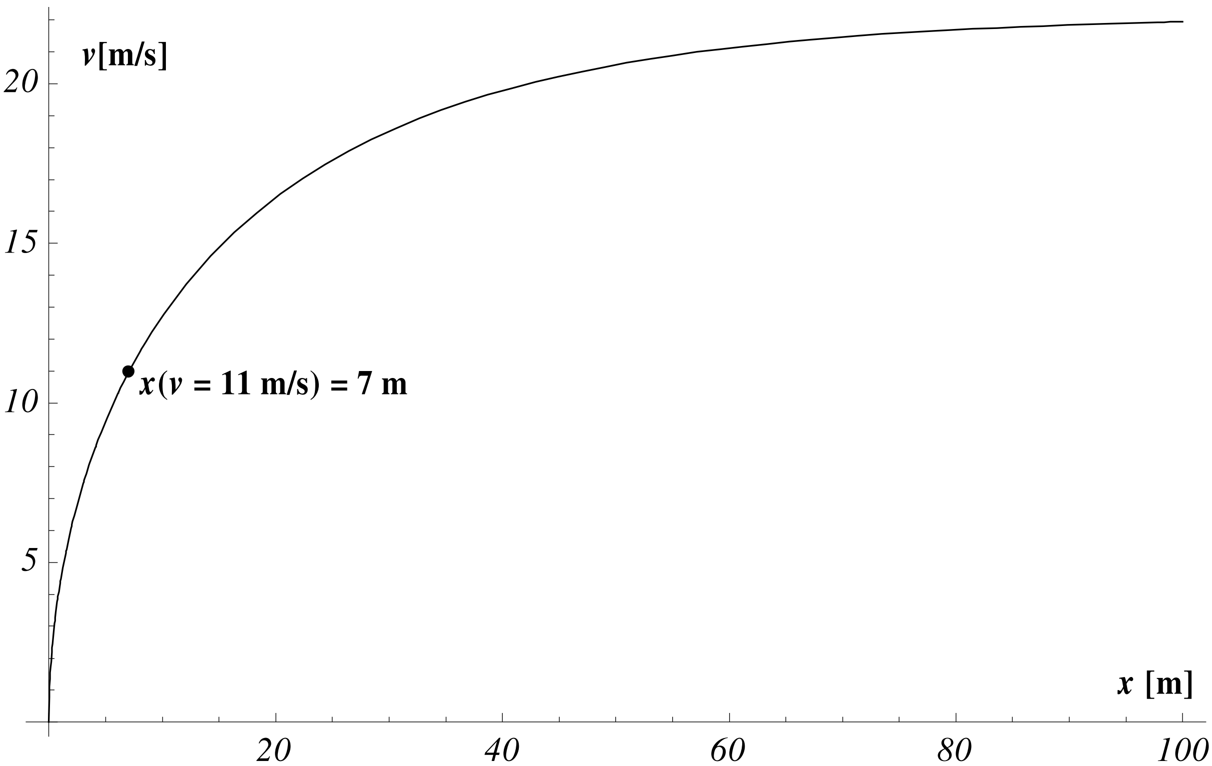
$S - maksimalni\ presek\ oreha = \pi \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$

$m - masa\ oreha = 0{,}01\ \mathrm{kg}$

Dobimo, da je α=0,02/m. Sedaj lahko izračunamo iskano višino:

$$x = -\frac{\ln\left(\frac{g - v^2\alpha}{g}\right)}{2\alpha},$$

$$x = 7\ \mathrm{m}.$$



Graf 3: Hitrost oreha v odvisnosti od poti

Ugotovil sem in tudi praktično preveril, da mora oreh pasti na tla z višine okrog 7 m, da mu poči lupina. Da pa oreh poči po šivu, je dovolj padec z višine 2 m.