

Univerza
v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo
in geodezijo



OSNOVE GRADBENE FIZIKE

Jože Peternej
Zvonko Jagličić

Ljubljana, 2014

Jože Peternelj
Zvonko Jagličić
OSNOVE GRADBENE FIZIKE
Univerzitetni učbenik

Recenzenta:
Marko Jagodič
Tomaž Kranjc

Lektorica:
Sonja Cestnik Zadnek

Oblikovalca naslovnice:
Katja Jagličić
Žiga Jagličić

Izdala in založila:
© 2014, Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
Jamova 2, Ljubljana
zanjo dekan, prof. dr. Matjaž Mikoš

Izšlo v 200 izvodih.
Tisk: Birografika Bori d.o.o.

Ljubljana, 2014

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

53.043:69(075.8)

PETERNELJ, Jože, 1944-

Osnove gradbene fizike : [univerzitetni učbenik] / Jože Peternelj, Zvonko
Jagličić. - Ljubljana : Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, 2014

ISBN 978-961-6884-15-0

1. Jagličić, Zvonko
271577856

*Survival is certainly a necessary aim of society,
but without at the same time keeping alight the
flame of the highest intellectual endeavors
it is not worth the effort.*

Subrahmanyan Chandrasekhar

Predgovor

Fizika je v večji ali manjši meri pomembna pri praktično vseh problemih, s katerimi se ukvarja gradbena stroka. Osnove fizike spoznajo študenti gradbeništva v prvem letniku študija pri predmetu Fizika. Znanje, ki ga pridobijo pri tem predmetu, jim omogoča boljše razumevanje snovi pri predmetih v višjih letnikih, ki so specifični za študij gradbeništva.

Pričujoči učbenik Osnove gradbene fizike bolj poglobljeno obravnava tista področja fizike, ki so še posebej zanimiva za gradbenike. To so tako imenovani transportni pojavi: prenos toplote, prenos snovi ali difuzija in prenos gibalne količine ter s tem povezan pojav viskoznosti. Zadnje, dokaj obširno poglavje je posvečeno zvočnemu valovanju.

Prvo poglavje v učbeniku obravnava prevajanje toplote skozi konstrukcijske sklope in prenos toplote s sevanjem med različnimi površinami. Nekaj prostora je namenjenega tudi uporabi fazno spremenljivih materialov v različnih konstrukcijskih elementih. Podane so osnovne enačbe za dvofazni Stefanov problem in ustrezne rešitve v okviru linearnega približka. Celotna problematika prenosa toplote je obdelana dovolj podrobno, da omogoča študentu samostojno reševanje problemov in je še posebej aktualna v današnjem času, ki prinaša na tem področju nove izzive in priložnosti v obliki energetskih izkaznic.

Difuzija vodne pare skozi porozne materiale je obdelana v drugem poglavju, kjer so opisane osnovne enačbe za primer stacionarnega stanja. Podobno je naslednje poglavje: v njem je podana fizikalna analiza transporta vlage v poroznih stenah, ki so v stiku z vlažno zemljino. Površinska napetost vode in z njo povezani kapilarni dvig sta pomemben vzrok vlage v zgradbah, ki negativno vpliva na mehanske in termodinamske lastnosti materialov ter posledično na dobo trajanja objektov.

Načrtovanje akustike prostorov in zaščite pred hrupom zahteva poznavanje fizikalnih pojavov povezanih z razširjanjem in absorpcijo zvoka v snovi. Ultrazvok s pridom uporabljamo na primer pri iskanju in prepoznavanju defektov v gradbenih elementih ali pri kvantitativni analizi strjevanja cementnih past. Vse to in še več so razlogi za vključitev zvočnega valovanja v učbenik gradbene fizike.

Na koncu naj še enkrat poudarimo, da je namen učbenika poglobljena obravnava tistih fizikalnih pojavov, ki so pomembni za gradbeno stroko. Poudarek je predvsem na razumevanju pojmov in matematično-fizikalnih metod, ki se pri tem uporabljajo. Pri študiju bralcu pomagajo številni rešeni praktični primeri, ki ga hkrati napeljujejo na samostojno reševanje podobnih nalog, na katere bo slej ko prej naletel v praksi. Učbenik torej ni zbirka empiričnih ali kvazi-empiričnih formul z navodili za njihovo uporabo, ampak ponuja temelj fizikalnih znanj, ki so potrebna za samostojno praktično in raziskovalno delo v gradbeni stroki.

Ljubljana, februarja 2014

Jože Peternelj
Zvonko Jagličić

Vsebina

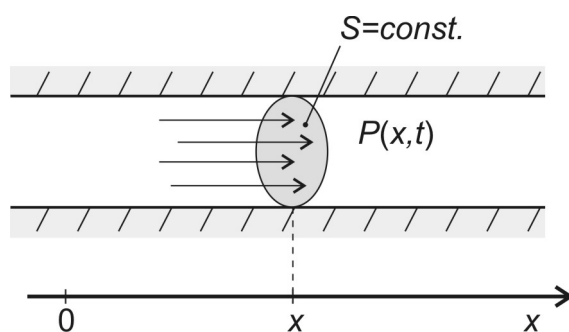
1	Prenos toplote	1
1.1	Prevajanje (kondukcija) toplote	1
1.2	Toplotni tok v stacionarnem stanju	4
1.3	Prestop toplote s telesa na okoliško tekočino in nasprotno	9
1.4	Posplošitev osnovnih enačb na tri dimenzije	15
1.5	Nestacionarni pojavi	18
1.6	Uporaba fazno spremenljivih vrst materiala v konstrukcijskih sklopih	33
1.7	Sevanje segrelih teles	42
1.8	Spekter sevanja črnega telesa in osnove fotometrije	58
2	Fazni diagram vode, vlaga v zraku in difuzija vodne pare	73
2.1	Fazni diagram vode	73
2.2	Vlaga v zraku	83
2.3	Difuzija vodne pare	85
3	Površinska napetost vode in dinamika kapilarnega dviga	95
3.1	Površinska napetost	95
3.2	Kapilarne sile	98
3.3	Viskoznost tekočin in dinamika kapilarnega dviga	101
4	Zvočno valovanje v tekočinah	111
4.1	Valovna enačba in hitrost zvoka	111
4.2	Energija zvočnega valovanja in jakost zvoka	125
4.3	Odboj in lom zvočnega valovanja	130
4.4	Interferenca valovanja v tekočinah	136
4.5	Sipanje in uklon zvočnega valovanja	142
4.6	Absorpcija zvoka v snovi	147
4.7	Stoječe valovanje v zaprtih prostorih in odmevanje ali reverberacija	148
4.8	Hrup in zaščita pred hrupom	152
	Literatura	161

1 Prenos toplote

Fizikalni procesi, ki omogočajo prevajanje (kondukcijo) toplote v snovi, so trki med molekulami in atomi snovi. Pri prenosu toplote, pri katerem je prevajanje samo eden od mehanizmov, moramo to ugotovitev dopolniti še s spoznanjem, da se toplota v kapljevinah in plinih lahko prenaša z enega mesta na drugo tudi z makroskopskim gibanjem snovi. V tem primeru govorimo o naravni ali prisilni (vsiljeni) *konvekciji*. Pomemben način prenosa toplote je tudi *sevanje* segretyh teles, pri katerem se toplota prenaša z elektromagnetnim valovanjem. V praksi vsi trije načini prenosa toplote velikokrat nastopajo hkrati.

1.1 Prevajanje (kondukcija) toplote

Osnovno značilnost prevajanja toplote vsebuje drugi zakon termodinamike, ki ga lahko opišemo tako: *toplota teče sama od sebe od mesta z višjo temperaturo k mestu z nižjo temperaturo*. Porazdelitev temperature v snovi opredelimo tako, da za vsako točko ($\vec{r}$) povemo vrednost temperature in njeno odvisnost od časa (t). Če temperaturo označimo s simbolom T , to v matematični obliki zapišemo kot $T = T(\vec{r}, t)$. Da bo račun čim enostavnejši, vzemimo, da je temperatura odvisna le od koordinate x in časa t , to je $T = T(x, t)$.



Slika 1.1: Toplotni tok skozi palico, ki je ob straneh toplotno izolirana, teče le v smeri osi x

Obravnavali bomo torej prenos toplote v palici, v kateri se temperatura spreminja le vzdolž palice s stalnim prečnim presekom S . V ta namen si lahko predstavljamo, da je palica ob straneh toplotno izolirana (slika 1.1). Koordinatno os x usmerimo vzdolž palice s koordinatnim izhodiščem na enem od

njenih koncev. Toplotni tok $P(x, t)$ je definiran kot množina toplote, ki se v časovni enoti prenese skozi prečni presek palice na oddaljenosti x v trenutku t . Torej,

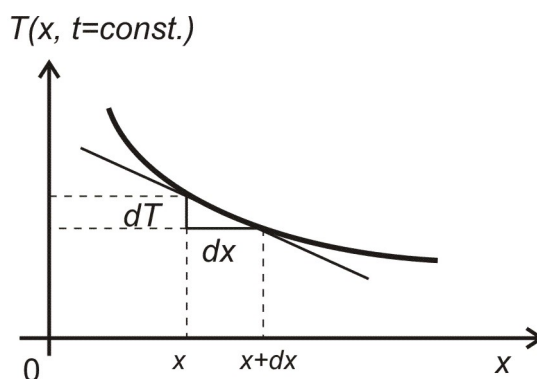
$$P(x, t) = \frac{dQ}{dt}, \quad (1.1)$$

pri čemer smo toploto označili s črko Q . Zakon o prevajanju toplote nam pove, da je toplotni tok tem večji, čim večji je prečni presek palice in čim večji je *temperaturni gradient* $\partial T / \partial x$ na izbranem mestu (slika 1.2). Sorazmernostni faktor, ki ga navadno označimo z λ , imenujemo *toplotna prevodnost* snovi, in je v splošnem odvisen od temperature. Ta količina je značilna za dano snov in nam pove, kako dobro snov prevaja toploto. Če temperaturne razlike niso prevelike, smemo temperaturno odvisnost toplotne prevodnosti zanemariti in jo obravnavamo kot konstanto. Tako sledi

$$P = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.2)$$

pri čemer nas negativni predznak opozarja, da teče toplota v smeri pojanja temperature. Iz enačbe (1.1) sledi, da izražamo toplotni tok v enotah J/s = W, kar bomo vedno, ko bomo želeli opredeliti enoto za izbrano fizikalno količino, zapisali tako:

$$[P] = W.$$



Slika 1.2: Temperaturni gradient $\partial T / \partial x = dT / dx$ je enak smernemu koeficientu tangente na graf $T(x, t = \text{const})$ pri koordinati x

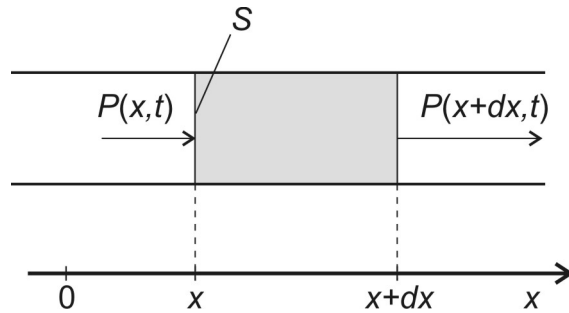
Iz enačbe (1.2) tudi razberemo, da je enota za toplotno prevodnost $[\lambda] = \text{W/m K}$. Koristna količina je še gostota toplotnega toka q ; to je toplotni tok na enoto prečnega preseka palice

$$q = \frac{P}{S} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.3)$$

in ga običajno merimo v enotah $[q] = \text{W/m}^2$. Če v nekem trenutku poznamo porazdelitev temperature v snovi, nam zakon o prevajanju toplote omogoča, da izračunamo gostoto toplotnega toka na poljubnem mestu. Zaradi prehajanja toplote z enega mesta na drugo in zaradi zakona o ohranitvi energije (to je

1. zakon termodinamike) se porazdelitev temperature v snovi v splošnem spreminja s časom. Da bomo ugotovili, kako se temperatura na danem mestu spreminja s časom, si izberimo majhen dolžinski element palice na odseku med x in $x + dx$ (slika 1.3) in pogledjmo, koliko toplote prejme v časovnem intervalu dt . Na toplejšem koncu toplota priteka, na hladnejšem pa odteka, tako da velja

$$d(dQ) = S (q(x, t) - q(x + dx, t)) dt .$$



Slika 1.3: Toplotni tok na majhnem dolžinskem elementu palice s prečnim presekom S

Po drugi strani pa se zaradi prejete toplote obravnavani del palice segreje, pri čemer velja,

$$d(dQ) = \rho S dx c_p dT ,$$

kjer je ρ gostota, c_p pa specifična toplota palice pri stalnem tlaku (za večino trdnih snovi in kapljev in se specifični toploti pri stalnem tlaku in stalni prostornini le malo razlikujeta in običajno govorimo le o specifični toploti snovi c). Izenačimo oba izraza, upoštevamo enačbo (1.3) in dobljeno enačbo na obeh straneh delimo z dt , pa dobimo

$$\rho S dx c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda S \left(\frac{\partial T(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) .$$

Izraz v oklepaju na desni strani predelamo tako:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (T(x + dx, t) - T(x, t)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(T(x, t) + \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} dx + \dots \right) - T(x, t) \right] = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} dx + \dots . \end{aligned}$$

Rezultat vstavimo v prejšnjo enačbo in dobimo končni rezultat

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} , \quad (1.4)$$

ki določa časovno spreminjanje temperature v palici zaradi prevajanja toplote od toplejših delov palice h hladnejšim. Kvocient

$$\chi \equiv \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

določa, kako hitro se izenačujejo temperature; pravimo mu *termična difuzivnost snovi*. Enota za termično difuzivnost je $[\chi] = \text{m}^2/\text{s}$.

Kakor smo že omenili, se v tekočinah toplota lahko prenaša tudi z makroskopskim gibanjem snovi. Če tekočino segrevamo na spodnji strani ali jo ohlajamo na zgornji strani, se pojavijo *konvekcijski tokovi*, pri čemer se toplejši in zaradi tega lažji deli tekočine dvigajo, na njihovo mesto pa pritekajo hladnejše zgornje plasti. Voda, ki se pozimi nabira na dnu jezera, ima temperaturo okrog 4°C , ker ima pri tej temperaturi največjo gostoto. Prenos toplote zaradi *konvekcije* je veliko hitrejši od prevajanja.

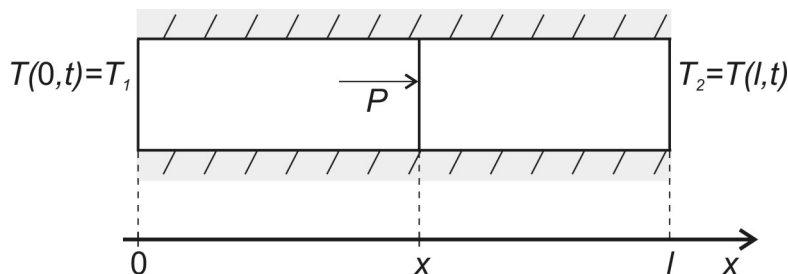
Preglednica 1.1: Toplotna prevodnost nekaterih snovi pri sobni temperaturi

Snov	Toplotna prevodnost λ [$\frac{\text{W}}{\text{m K}}$]	Snov	Toplotna prevodnost λ [$\frac{\text{W}}{\text{m K}}$]
zrak	0,026	srebro	420
voda	0,6	opeka	0,53
led (0°C)	2,2	beton	1,15
steklo	0,4 – 0,8	les	0,04 – 0,4
aluminij	202	pluta	0,07
baker	380	stiropor	0,033
železo	75	glina (suha - vlažna)	0,15 – 1,8
svinec	35		

Kakor lahko razberemo iz tabele 1.1, je toplotna prevodnost kovin sorazmerno velika. To je zato, ker se pri kovinah toplota v glavnem prenaša s termičnim gibanjem prostih elektronov, ki imajo hitrosti okrog 10^6 m/s , medtem ko so termične hitrosti molekul in atomov od nekaj 100 m/s do približno 1000 m/s .

1.2 Toplotni tok v stacionarnem stanju

Vzemimo homogeno palico z dolžino l in stalnim prečnim presekom S (slika 1.4). Nadalje bomo vzeli, da je temperatura na koncih palice stalna. Na enem koncu naj bo T_1 , na drugem pa $T_2 < T_1$. Toplotna prevodnost snovi je v splošnem odvisna od temperature, a če razlika $T_1 - T_2$ ni prevelika, lahko rečemo, da je λ konstanten vzdolž palice.



Slika 1.4: Homogena palica. Plašč palice je toplotno izoliran, tako da toplotni tok P teče le v smeri osi x .

Koordinatno os x usmerimo vzdolž palice in koordinatno izhodišče postavimo na tisti konec, ki ima temperaturo T_1 . Ker sta temperaturi na koncih palice stalni, se v njej slej ko prej vzpostavi *stacionarno stanje*, za katero je značilno, da je temperatura v palici odvisna le od koordinate x , nič pa od časa t , tako da velja $T = T(x)$, $T(0) = T_1$ in $T(l) = T_2$. Toplotni tok, ki teče skozi palico, zapišemo v skladu z enačbo (1.2)

$$P \equiv q S = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad (1.5)$$

in je neodvisen od koordinate x . To sledi iz predpostavke, da je temperatura v palici neodvisna od časa, kar pomeni, da se toplota nikjer ne kopiči niti ne izgublja. V nasprotnem primeru bi se temperatura v palici spreminjala s časom. Enačbo (1.5) integriramo in dobimo

$$T(x) = T_1 - \frac{P}{\lambda S} x ,$$

pri čemer smo upoštevali *robni pogoj* $T(x = 0) \equiv T(0) = T_1$. Rezultat nam pove, da temperatura v palici v stacionarnem stanju pojema linearno v smeri toplotnega toka.¹ Če upoštevamo še drugi robni pogoj $T(x = l) \equiv T(l) = T_2$, lahko toplotni tok skozi palico zapišemo v obliki

$$P = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{l}$$

ali

$$P = S U (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{l}{\lambda S}} \equiv \frac{T_1 - T_2}{R} ,$$

kjer smo definirali *toplotno upornost* palice

$$R = \frac{l}{\lambda S} \quad (1.6)$$

in njeno *toplotno prepustnost*

$$U = \frac{\lambda}{l} . \quad (1.7)$$

Običajna enota za toplotno prepustnost U sledi iz definicije in je $[U] = \text{W}/\text{m}^2 \text{ K}$. Če je toplotna prepustnost palice $2,5 \text{ W}/\text{m}^2 \text{ K}$, to pomeni, da skozi vsak m^2 prečnega preseka teče toplotni tok $2,5 \text{ W}$, kadar je med njenima koncema temperaturna razlika 1 K . Podobno sledi enota za toplotno upornost iz definicije te količine in je $[R] = \text{K}/\text{W}$. Toplotna upornost palice, na primer $15 \text{ K}/\text{W}$, pomeni, da teče skozi palico toplotni tok 1 W , če je med njenima koncema temperaturna razlika 15 K . Zveza med obema količinama je razvidna iz enačb (1.6) in (1.7) in je

$$U = \frac{1}{R S} . \quad (1.8)$$

Primer 1.1: Določi toplotni tok in potek temperature v večplastnem zidu za stacionarno stanje! Zid je sestavljen iz več homogenih plasti, ki imajo vse enak prečni presek S ter debeline l_i in toplotne prevodnosti λ_i . Temperaturna razlika med eno in drugo stranjo zidu je $T_1 - T_2$ (slika 1.5).

¹To sledi tudi neposredno iz enačbe (1.4), ki se v stacionarnem stanju poenostavi v $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ in ima rešitev $T = ax + b$, kjer sta a in b konstanti, ki ju določimo z robnimi pogoji.

Rešitev: Nalogo najhitreje rešimo, če enačbo (1.5) prepišemo v obliki

$$P = -\frac{dT}{\frac{dx}{\lambda S}} = -\frac{dT}{dR}.$$

Obe strani pomnožimo z dR in integriramo, pa imamo

$$P \int dR = P \left(\int_0^{l_1} \frac{dx}{\lambda_1 S} + \dots + \int_{l_1+\dots+l_{N-1}}^{l_1+\dots+l_N} \frac{dx}{\lambda_N S} \right) = - \int_{T_1}^{T_2} dT$$

ali

$$P = \frac{T_1 - T_2}{R} = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + \dots + R_N} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{l_1}{\lambda_1 S} + \dots + \frac{l_N}{\lambda_N S}}.$$

Iz gornjega rezultata sledi, da se toplotni upori zaporednih plasti seštevajo. Celoten toplotni upor večplastnega zidu je enak vsoti toplotnih uporov posameznih plasti

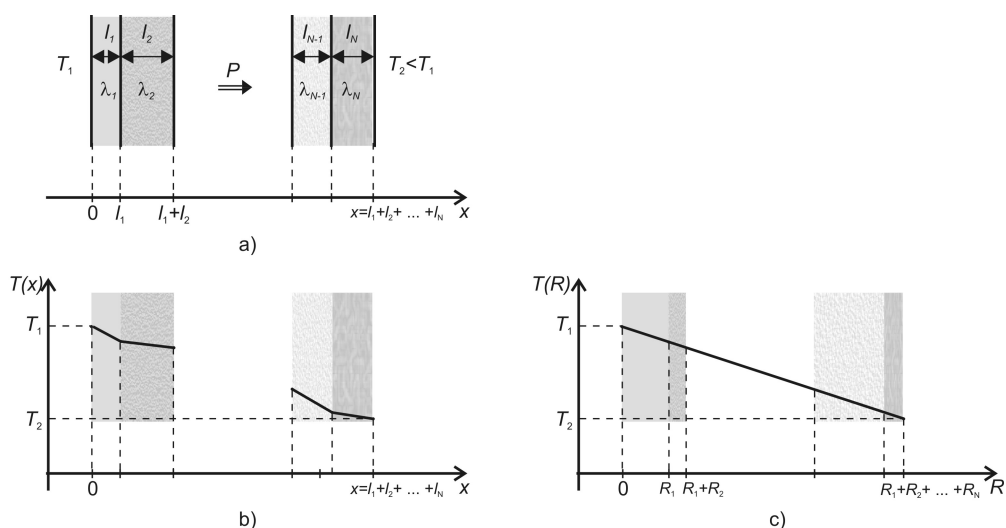
$$R = R_1 + \dots + R_N = \frac{l_1}{\lambda_1 S} + \dots + \frac{l_N}{\lambda_N S}.$$

Če upoštevamo enačbo (1.8), lahko podobno zvezo zapišemo tudi za toplotno prepustnost večplastnega zidu. Gornjo enačbo na obeh straneh pomnožimo s S , kar nam da

$$R S = R_1 S + \dots + R_N S$$

ali

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_N}.$$



Slika 1.5: Potek temperature v večplastnem zidu za stacionarno stanje

Enačba $P = -dT/dR$ nam omogoča, da preprosto izračunamo temperaturo $T(x)$ v poljubni točki v zidu, namreč

$$P \int_0^{R(x)} dR = - \int_{T_1}^{T(x)} dT .$$

Naj leži izbrana točka v i -ti plasti tako, da velja $x = l_1 + \dots + l_{i-1} + x_i$, pri čemer meri x_i oddaljenost točke od levega roba i -te plasti. Tedaj imamo

$$P \left(R_1 + \dots + R_{i-1} + \frac{x_i}{\lambda_i S} \right) = T_1 - T(x) .$$

$$T(x) \equiv T(l_1 + \dots + l_{i-1} + x_i) = [T_1 - P(R_1 + \dots + R_{i-1})] - \frac{P}{\lambda_i S} x_i .$$

Izraz v oglatem oklepaju na desni strani zadnje enačbe je očitno $T(l_1 + \dots + l_{i-1})$, to je temperatura na meji med $i - 1$ in i -to plastjo. Gornjo enačbo tako lahko prepišemo:

$$T(l_1 + \dots + l_{i-1} + x_i) = T(l_1 + \dots + l_{i-1}) - \frac{P}{\lambda_i S} x_i .$$

Iz enačbe razberemo, da v vsaki plasti temperatura v smeri toplotnega toka pojema linearno. Strmina premice je obratno sorazmerna s toplotno prevodnostjo plasti. Čim manjša je toplotna prevodnost plasti, tem strmejša je premica v izbrani plasti (slika 1.5). Po drugi strani pa iz enačbe $P = -dT/dR$ prav tako sledi, da potek temperature na grafu, na katerem na ordinatno os nanašamo temperaturo, na abscisno os pa toplotno upornost, predstavlja ena sama premica z naklonskim koeficientom $dT/dR = -P$.

Enako kakor skozi večplastni zid lahko obravnavamo prehod toplote tudi skozi plast, katere prečni presek se spreminja v smeri toplotnega toka. Kot primer vzemimo krogelno lupino, v notranjosti katere vzdržujemo temperaturo T_1 , medtem ko je temperatura zunaj enaka $T_2 < T_1$. Zaradi krogelne simetrije velja $T = T(r)$ in toplotni tok skozi površino krogle s polmerom $r_1 < r < r_2$, pri čemer sta r_1 in r_2 notranji in zunanji polmer krogelne lupine, je enak

$$P = - \frac{dT}{\frac{dr}{\lambda S(r)}} = - \frac{dT}{\frac{dr}{\lambda 4 \pi r^2}} \equiv - \frac{dT}{dR} .$$

Enačbo preuredimo in integriramo, pa dobimo

$$P \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\lambda 4 \pi r^2} = - \int_{T_1}^{T_2} dT ,$$

$$P = \frac{T_1 - T_2}{R} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{4 \pi \lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} .$$

Iz zadnje enačbe razberemo, da je toplotna upornost homogene krogelne lupine enaka

$$R = \frac{1}{4 \pi \lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) .$$

Če je lupina zelo debela ($r_2 \rightarrow \infty$), sledi $P = 4 \pi \lambda r_1 (T_1 - T_2)$ in $R = 1/4 \pi \lambda r_1$.

Primer 1.2: Naj bo krogelna lupina sestavljena iz dveh plasti s toplotnima prevodnostma λ_1 in λ_2 (slika 1.6). Določi toplotni tok in toplotno upornost, če je znotraj lupine temperatura T_1 , zunaj pa $T_2 < T_1$ in če so ustrezni polmeri krogelnih plasti $r_1 < r_2 < r_3$!

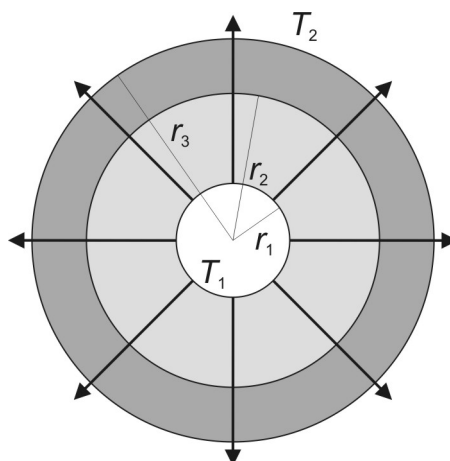
Rešitev: Računamo tako kakor v primeru 1.1. Tako imamo

$$P \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi\lambda_1 r^2} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{dr}{4\pi\lambda_2 r^2} \right) = T_1 - T_2$$

in

$$P = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{4\pi\lambda_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)} \equiv \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2};$$

to je v skladu s prejšnjo ugotovitvijo, da se toplotne upornosti zaporednih plasti seštevajo.



Slika 1.6: Prenos toplote skozi krogelno lupino. Gostota toplotnega toka $q(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$ kaže v radialni smeri pravokotno na izoterme, ki so koncentrične krogle.

Primer 1.3: Vzemimo kos ledu v obliki krogle in ga potopimo v vodo s temperaturo $T_1 > 0^\circ\text{C}$. Določi hitrost taljenja ledu v nekem trenutku ob predpostavki, da je temperatura ledu 0°C in da ni konvekcije!

Rešitev: Ker sta led in voda pri atmosferskem tlaku v toplotnem ravnovesju pri $T_0 = 0^\circ\text{C}$, ima plast vode tik ob površini ledu temperaturo 0°C . Na veliki oddaljenosti od ledu pa ima voda temperaturo T_1 . Toplotni tok je torej usmerjen radialno navznoter v smeri proti središču ledene krogle. Toplota, ki jo led prejme v časovnem intervalu dt , se porabi za taljenje ledu, tako da velja

$$P dt = q_t dm,$$

kjer je q_t specifična talilna toplota ledu. Vzemimo, da je polmer ledene krogle v izbranem trenutku enak r . V tem primeru je toplotni tok, ki ga prejema površina ledu, enak $P = 4\pi\lambda r (T_1 - T_0)$. Hitrost taljenja dm/dt je torej

$$\frac{dm}{dt} = \frac{4\pi\lambda r (T_1 - T_0)}{q_t}.$$

Pri $r = 10 \text{ cm}$, $T_1 = 10^\circ \text{C}$ in če upoštevamo, da je toplotna prevodnost vode enaka $0,6 \text{ W/mK}$, sledi $dm/dt = 0,02 \text{ g/s}$. Račun lahko nadaljujemo, če zapišemo $m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_l$ in $r = \left(\frac{3}{4\pi\rho_l}\right)^{1/3} m^{1/3}$, kjer smo z ρ_l označili gostoto ledu. Izraz za r vstavimo v gornjo enačbo; ko jo preuredimo, imamo

$$\frac{dm}{m^{1/3}} = - \left(\frac{3}{4\pi\rho_l} \right)^{1/3} \frac{4\pi\lambda(T_1 - T_0)}{q_t} dt .$$

Enačbo integriramo,

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m^{1/3}} = - \left(\frac{3}{4\pi\rho_l} \right)^{1/3} \frac{4\pi\lambda(T_1 - T_0)}{q_t} \int_0^t dt ,$$

kjer je m_0 začetna masa ledu. Sledi

$$m(t) = m_0 \left(1 - \frac{8\pi\lambda(T_1 - T_0)r_0 t}{3m_0 q_t} \right)^{3/2} ,$$

pri čemer je r_0 začetni polmer ledene kroglice. Če izberemo $r_0 = 10 \text{ cm}$, je $m_0 \approx 4 \text{ kg}$ in čas taljenja take kroglice pri opisanih pogojih sledi iz enačbe $m(t) = 0$. Tako dobimo

$$t = \frac{3m_0 q_t}{8\pi\lambda r_0 (T_1 - T_0)} = \frac{3 \cdot 4 \text{ kg} \cdot 336 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1}}{8\pi \cdot 0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 10 \text{ K}} \approx 2,7 \cdot 10^5 \text{ s} \approx 74 \text{ h} \approx 3 \text{ dni} .$$

Podoben primer je izhlapevanje vodne kapljice v zraku. Vodna kapljica je obkrožena s tanko plastjo nasičeno vlažnega zraka in para se zaradi difuzije počasi razširja v okoliški zrak. To povzroča nadaljnje izhlapevanje kapljice. Toploto, potrebno za izhlapevanje, dobiva kapljica iz zraka. Pri tem igra pomembno vlogo mehanizem prestopa toplote iz zraka na kapljico.

1.3 Prestop toplote s telesa na okoliško tekočino in nasprotno

V praksi večkrat naletimo na prestop toplote s površine telesa na okoliško tekočino in nasprotno. Kot primer vzemimo ravno steno, ki meji na zrak. Temperatura površine stene, ki meji na zrak, naj bo konstantna po celotni površini in enaka T_1 , temperatura zraka na veliki oddaljenosti od stene naj bo prav tako stalna in enaka $T_0 < T_1$. V stacionarnem stanju je porazdelitev temperature v zraku blizu stene prikazana na sliki 1.7. Skoraj celotna temperaturna razlika $T_1 - T_0$ je omejena na sorazmerno tanko plast zraka ob steni, tako imenovano *termalno plast*. Če vzamemo, da zelo tanka plast zraka tik ob steni miruje, je gostota toplotnega toka iz stene v zrak enaka

$$q = -\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} , \quad (1.9)$$

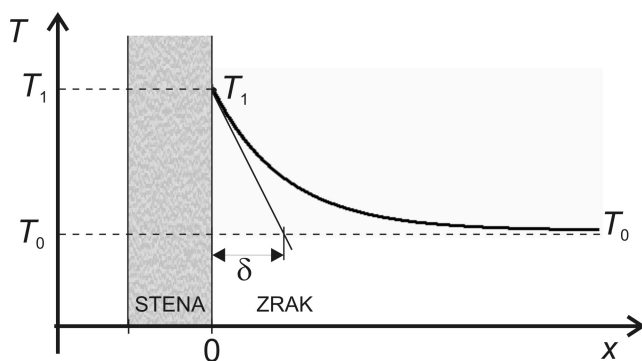
kjer je λ toplotna prevodnost zraka in je koordinatna os x pravokotna na steno, kamor smo postavili koordinatno izhodišče. Plasti zraka, ki niso tik ob steni, ne mirujejo in tam se toplota prenaša s kondukcijo in s konvekcijo. Hladnejši zrak (T_0) se zaradi toplote, ki jo oddaja stena, segreje, postane redkejši in se ob njej dviga ter tvori *laminarno mejno plast*, če temperaturna razlika $T_1 - T_0$ ni prevelika. V nasprotnem primeru so hitrosti prevelike in gibanje zraka v mejni plasti lahko postane turbulentno. V enem in drugem primeru govorimo o *naravni konvekciji*. Lahko pa gibanje zraka dodatno pospešujemo, na primer

z ventilatorji, in tedaj govorimo o *prisilni* ali *vsiljeni konvekciji*. Nalogo je prvi rešil H. Pohlhausen leta 1921. V navadi je, da gostoto toplotnega toka (1.9) zapišemo v obliki

$$q = h (T_1 - T_0) , \quad (1.10)$$

kjer koeficient h imenujemo *toplotni prestopni koeficient*. Enota zanj je razvidna iz definicije in je

$$[h] = \text{W/m}^2\text{K} .$$



Slika 1.7: Prenos toplote s stene na zrak

Prestopni koeficient nam pove, koliko toplote odda v časovni enoti vsak m^2 stene, če je temperaturna razlika med steno in okoliškim zrakom ($T_1 - T_0$) enaka 1 K. Prestopni koeficient se običajno zapiše tako:

$$h = Nu \cdot \frac{\lambda}{H} , \quad (1.11)$$

kjer je H višina stene, λ toplotna prevodnost zraka in Nu tako imenovano *Nusseltovo število*, ki opredeljuje prestop toplote s stene na zrak ali nasprotno. Za navpično ravno steno višine H in naravno konvekcijo Pohlhausnov račun pokaže, da je

$$Nu = 0,480 \left(\frac{g H^3}{\nu^2} \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_1} \right)^{1/4} = 0,480 G^{1/4} .$$

Tako smo definirali še eno število, in sicer *Grashofovo število*,

$$G = \frac{g H^3}{\nu^2} \cdot \frac{T_1 - T_0}{T_1} ,$$

kjer je $\nu = \eta/\rho$ kinematična viskoznost zraka (η je viskoznost in ρ gostota zraka), g pa težni pospešek ($9,81 \text{ m/s}^2$). Vzemimo, da je temperatura stene $T_1 = 303 \text{ K}$ (30°C) in $T_0 = 293 \text{ K}$ (20°C) ter višina stene $H = 3 \text{ m}$. Upoštevamo še, da je kinematična viskoznost zraka $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. V tem primeru je vrednost Grashofovega števila $G \approx 4 \cdot 10^{10}$, vrednost Nusseltovega števila pa $Nu \approx 215$. Ustrezna vrednost za prestopni koeficient je v tem primeru $h = 215 \cdot 0,026 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} / 3 \text{ m} \approx 2 \text{ W/m}^2\text{K}$.

V enačbi (1.9) zapišimo temperaturni gradient v obliki (glej sliko 1.7) $dT/dx|_{x=0} = -\frac{T_1-T_0}{\delta}$; tedaj smemo reči, da je δ merilo za širino termalne plasti. Če izenačimo izraza (1.9) in (1.10) ter upoštevamo (1.11), sledi

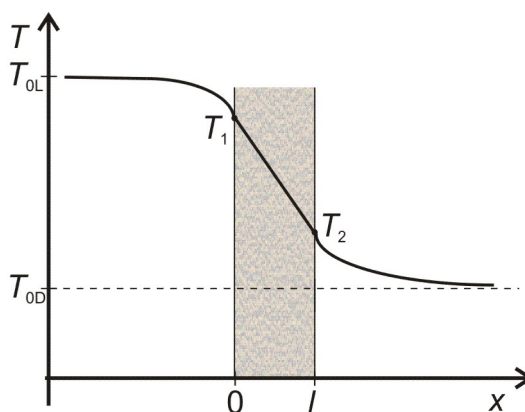
$$\lambda \frac{T_1 - T_0}{\delta} = Nu \frac{\lambda}{H} (T_1 - T_0)$$

in

$$\delta = \frac{H}{Nu} = \frac{1}{0,48} \cdot \frac{H}{Gr^{1/4}}.$$

Če vzamemo $H = 3$ m in vrednost Nusseltovega števila, ki smo jo izračunali zgoraj, dobimo $\delta \approx 1,4$ cm. Na splošno velja, da je red velikosti termalne plasti pri naravni konvekciji nekaj cm.

Zelo pogost prestop toplote, zlasti v gradbeni stroki, je prikazan na sliki 1.8. Razlika v primerjavi s prejšnjim primerom je, da temperature površin stene niso znane. Kar poznamo, je temperatura zraka na razdalji od stene (na obeh straneh stene), ki je velika v primerjavi z debelino termalne plasti.



Slika 1.8: Prenos toplote skozi navpično steno z upoštevanjem termalnih plasti

Naj bo temperatura zraka na levi strani stene T_{0L} , na desni pa $T_{0D} < T_{0L}$, tako da teče toplota iz zraka na levi strani na steno, nato imamo prevajanje toplote skozi steno in prestop toplote s stene na zrak na desni strani. Nalogo lahko rešimo numerično s posplošitvijo Pohlhausnove metode ob predpostavki, da je tok zraka v termalnih plasteh na eni in na drugi strani stene laminaren. Na levi površini stene se zrak ohlaja in polzi navzdol, na desni površini pa se segreva in se dviga navzgor. Pokaže pa se, da ne naredimo velike napake (pri stenah z veliko prevodnostjo manj od 1 %, pri opečnih ali betonskih stenah pa manj od 10 %), če zanemarimo, da se temperatura površin stene spreminja z višino in računamo s povprečnimi temperaturami ene in druge površine stene, ki jih moramo seveda izračunati. Naj bo povprečna temperatura leve površine stene T_1 , desne pa $T_2 < T_1$. V stacionarnem stanju zapišemo toplotni tok iz zraka na steno, skozi steno in s stene na zrak na desni strani takole:

$$q = h_L (T_{0L} - T_1), \quad (1.12)$$

$$q = U (T_1 - T_2), \quad (1.13)$$

$$q = h_D (T_2 - T_{0D}) . \quad (1.14)$$

S h_L in h_D smo označili prestopna koeficienta za levo in desno površino stene, ki sta v splošnem različna, $U = 1/RS$ pa je *toplotna prepustnost* stene s prečnim presekom S . Če vsako od enačb (1.12) - (1.14) delimo s koeficientom na desni strani enačbe in tako dobljene enačbe seštejemo, dobimo izraz za gostoto toplotnega toka v obliki

$$q = \frac{T_{0L} - T_{0D}}{\frac{1}{h_L} + \frac{1}{U} + \frac{1}{h_D}} . \quad (1.15)$$

Če izraz (1.15) vstavimo v enačbi (1.12) in (1.14) dobimo temperaturne skoke ob površinah stene,

$$T_{0L} - T_1 = \frac{T_{0L} - T_{0D}}{1 + \frac{h_L}{U} + \frac{h_L}{h_D}}$$

in

$$T_2 - T_{0D} = \frac{h_L}{h_D} (T_{0L} - T_1) .$$

Prestopne koeficiente izračunamo tako, kakor smo to opisali prej (enačba 1.11) ob predpostavki, da imamo opravka z naravno konvekcijo in laminarnim tokom zraka v termalnih mejnih plasteh na eni in na drugi strani stene. V približku povprečnih površinskih temperatur sledi

$$Nu^{(D)} = 0,471 \left(\frac{g H^3}{\nu^2} \cdot \frac{T_{0L} - T_{0D}}{T_{0D}} \right)^{1/4} , \quad (1.16)$$

$$Nu^{(L)} = Nu^{(D)} \left(\frac{T_{0D}}{T_{0L}} \right)^{1/5} . \quad (1.17)$$

Naj bo stena iz opeke debeline $l = 30$ cm, višine $H = 3$ m in s toplotno prevodnostjo $\lambda_{opeka} = 0,53$ W/mK. Temperaturi zraka izberimo $T_{0L} = 303$ K in $T_{0D} = 288$ K. Iz enačb (1.16) in (1.17) potem sledi $Nu^{(D)} \approx Nu^{(L)} = 235$ in $h_L \approx h_D = 2$ W/m²K, kar je podoben rezultat kakor v prejšnjem primeru. Toplotna prepustnost izbrane stene je $U_{opeka} = \lambda_{opeka}/l = 1,8$ W/m²K in $T_{0L} - T_1 \approx T_2 - T_{0D} = 4,8$ K. In nazadnje, iz enačbe (1.15) izračunamo $q = 10$ W/m².

V izbranem primeru so temperaturni skoki ob površinah stene sorazmerno veliki, ker so prestopni koeficienti za ta primer približno iste velikosti kakor toplotna prepustnost stene in se celotna temperaturna razlika med zrakom na levi in desni strani $T_{0L} - T_{0D}$ približno enakomerno porazdeli na termalni plasti in steno. Empirične vrednosti prestopnih koeficientov so navadno precej večje od zgoraj izračunane vrednosti. To je zato, ker imamo v praksi velikokrat opravka s prisilno konvekcijo (na primer veter), ker površine sten niso popolnoma ravne oziroma gladke in gibanje zraka v termalni plasti ni laminarno, ampak turbulentno.

Značilne vrednosti prestopnih koeficientov so nekje med 10 in 15 W/m²K. Običajno so prestopni koeficienti za zunanje površine sten večji kakor za notranje. Če vzamemo $h_L \approx h_D = 10$ W/m²K, dobimo pri nespremenjenih preostalih parametrih za gornji primer $T_{0L} - T_1 \approx T_2 - T_{0D} = 2$ K.

Primer 1.4: Po železni cevi z notranjim polmerom $r_1 = 10$ cm in zunanjim $r_2 = 10,5$ cm se pretaka vroča voda s temperaturo $T_1 = 80$ °C. Zunanji polmer plašča izolacije je $r_3 = 20,5$ cm in ima toplotno prevodnost $\lambda = 0,05$ W/mK. Toplotni prestopni koeficient s površine izolacije na okoliški zrak je $h = 4$ W/m²K. Kolikšne so toplotne izgube na enoto dolžine cevi, če je temperatura okoliškega zraka $T_0 = -10$ °C?

Rešitev: Toplotni tok, ki ga oddaja odsek cevi z dolžino L , je

$$P = \frac{T_1 - T_2}{R(L)},$$

pri čemer smo temperaturo na površini cevi označili s T_2 . Toplotni upor izračunamo podobno, kakor smo opisali v razdelku 1.2 za kroglo, to je

$$R(L) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\lambda_{Fe} 2\pi L r} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{dr}{\lambda 2\pi L r} = \frac{1}{2\pi \lambda L} \left(\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{\lambda}{\lambda_{Fe}} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right).$$

Toplotna prevodnost železa v obravnavanem temperaturnem območju (≈ 100 °C) je okrog 70 W/mK. Zato je $\lambda/\lambda_{Fe} = 0,05/70 \approx 7 \cdot 10^{-4}$ in smemo drugi člen v enačbi za toplotno upornost $R(L)$ zanemariti. To nam da

$$R(L) \approx \frac{1}{2\pi \lambda L} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)$$

in

$$q = \frac{P}{2\pi L r_3} = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{r_3 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}.$$

Po drugi strani pa je gostota toplotnega toka s površine cevi na okoliški zrak enaka

$$q = h (T_2 - T_0).$$

Iz zadnje enačbe za q izrazimo T_2 in vstavimo v prvo, pa dobimo

$$q = \frac{(\lambda/r_3) (T_1 - T_0)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{\lambda/r_3}{h}}.$$

Če vstavimo podatke, sledi

$$q = \frac{(0,05 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}/0,205 \text{ m}) \cdot 90 \text{ K}}{0,67 + 0,06} \approx 30 \text{ W/m}^2.$$

Toplotne izgube na vsak dolžinski meter cevi so torej enake

$$\frac{P}{L} = q \cdot 2\pi r_3 = 38,6 \text{ W/m}.$$

Toplota, ki uhaja v okolico skozi plašč toplovodne cevi, gre na račun notranje energije vode, zato se ohlaja. To pa pomeni, da gornji račun velja le za posamezne odseke cevi, ki so dovolj kratki, da ima voda po celem odseku približno enako temperaturo. Gornji račun moramo torej narediti za vsak odsek cevi posebej in za različne odseke moramo vzeti različno temperaturo vode, ker njena temperatura pojema v smeri toka vzdolž

cevi. Čim krajše odseke izberemo, tem natančnejši bo rezultat. Naj bo toplovodna cev ravna in koordinatno os x usmerimo vzdolž cevi v smeri toka. Koordinatno izhodišče postavimo na tisti konec cevi, na katerem voda s temperaturo T_1 vstopa. Vzemimo odsek cevi med x in $x + dx$. Če vzamemo, da je tlak vode stalen, nam prvi zakon termodinamike pove

$$dm c_p dT = -q(x) 2\pi r_3 dx dt ,$$

pri čemer je $T = T(x)$ temperatura vode na oddaljenosti x vzdolž cevi. Enačbo na obeh straneh delimo z dt in označimo masni tok vode $dm/dt = \Phi_m$; tedaj imamo

$$\Phi_m c_p dT = -\frac{2\pi\lambda}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{\lambda/r_3}{h}} (T - T_0) dx ,$$

pri čemer smo upoštevali izraz za gostoto toplotnega toka, ki smo ga izračunali zgoraj in v katerem smo T_1 nadomestili s T . Označimo

$$\frac{\Phi_m c_p \left[\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{\lambda/r_3}{h} \right]}{2\pi\lambda} \equiv l_0 ;$$

prvi zakon termodinamike prepišemo v obliki

$$\frac{dT}{T - T_0} = -\frac{dx}{l_0} .$$

Enačbo integriramo

$$\int_{T_1}^T \frac{dT}{T - T_0} = -\frac{1}{l_0} \int_0^x dx$$

in dobimo

$$T(x) = (T_1 - T_0) e^{-x/l_0} + T_0 .$$

l_0 je karakteristična dolžina, ki nam pove, kako hitro pojema temperatura vode vzdolž cevi. Če je cev kratka v primerjavi s to dolžino ($L \ll l_0$), lahko računamo toplotne izgube tako, kakor da je temperatura vode v cevi stalna. V nasprotnem primeru pa zapišemo gostoto toplotnega toka tako:

$$q(x) \equiv \frac{\lambda/r_3}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{\lambda/r_3}{h}} (T - T_0) = \frac{\lambda/r_3}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{\lambda/r_3}{h}} \left[(T_1 - T_0) e^{-x/l_0} \right] \equiv \frac{\Phi_m c_p}{2\pi r_3 l_0} (T_1 - T_0) e^{-x/l_0} .$$

Toplotne izgube na odseku cevi, na primer od $x = 0$ do $x = L$, so

$$P(0, L) = 2\pi r_3 \int_0^L q(x) dx = \frac{\Phi_m c_p}{l_0} (T_1 - T_0) \int_0^L e^{-x/l_0} dx = \Phi_m c_p (T_1 - T_0) (1 - e^{-L/l_0}) .$$

Če upoštevamo izraz za l_0 , lahko zadnjo enačbo predelamo tako:

$$P(0, L) = \frac{2\pi\lambda l_0}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{\lambda/r_3}{h}} (T_1 - T_0) (1 - e^{-L/l_0}) .$$

Če je $L \ll l_0$, velja $1 - e^{-L/l_0} \approx 1 - 1 + \frac{L}{l_0} + \dots \approx \frac{L}{l_0}$ in dobimo rezultat, ki smo ga dobili ob predpostavki, da je temperatura vode v cevi stalna in enaka T_1 . V nasprotnem primeru, ko je $L \gg l_0$, pa imamo

$$P(0, L) = \Phi_m c_p (T_1 - T_0) ;$$

ta rezultat takoj sledi iz enačbe $P(0, L) = \frac{dQ}{dt} = \frac{dm}{dt} c_p (T_1 - T_0)$.

Poglejmo še, kolikšna je značilna dolžina l_0 za različne vrednosti parametrov. Če je notranji polmer cevi $r_1 = 10$ cm, je masni tok Φ_m pri hitrosti vode okrog 1 m/s reda velikosti 20 kg/s. Če upoštevamo še, da je specifična toplota vode $c_p \approx 4,2$ kJ/kgK, sledi

$$l_0 = \frac{20 \text{ kg s}^{-1} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{2 \pi \cdot 0,05 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}} (0,67 + 0,06) \approx 200 \text{ km} .$$

Karakteristična dolžina za te vrednosti parametrov je torej zelo velika in temperatura vode se na razdalji nekaj km ne spremeni zaznavno. Vzemimo, da cev ni izolirana, tako da imamo železno cev z debelino 5 mm. V izrazu za l_0 nadomestimo $\lambda \rightarrow \lambda_{Fe}$, $r_2 \rightarrow r_1$ in $r_3 \rightarrow r_2$. Vstavimo podatke in za železno cev brez izolacije dobimo

$$l_0 = \frac{20 \text{ kg s}^{-1} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{2 \pi \cdot 70 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}} (0,05 + 175) \approx 30 \text{ km} .$$

Razdalja je še vedno velika, in to na račun sorazmerno majhnega prestopnega koeficienta. Če vzamemo $h = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$, dobimo $l_0 \approx 5 \text{ km}$. V limiti, ko gre $h \rightarrow \infty$, pa imamo za železno cev brez izolacije $l_0 \approx 10 \text{ m}$. V tem primeru vidimo, da upoštevanje toplotnega prestopnega koeficienta močno spremeni rezultat.

1.4 Posplošitev osnovnih enačb na tri dimenzije

Enačba (1.4) velja le, ko je porazdelitev temperature v snovi odvisna le od koordinate x in časa t , to je $T = T(x, t)$. V splošnem pa je porazdelitev temperature v telesu ali snovi odvisna od vseh treh koordinat in časa, tako da velja $T = T(x, y, z, t)$. V tem primeru enačbo (1.4) zapišemo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T , \quad (1.18)$$

pri čemer smo vpeljali tako imenovani Laplaceov operator v kartezičnih koordinatah (iz konteksta bo vselej razvidno, kdaj pomeni Δ razliko in kdaj je Laplaceov operator),

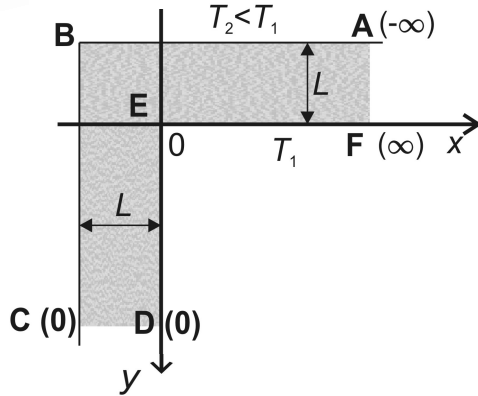
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Gostota toplotnega toka, ki je v primerjavi s toplotnim tokom P vektorska količina, se zapiše

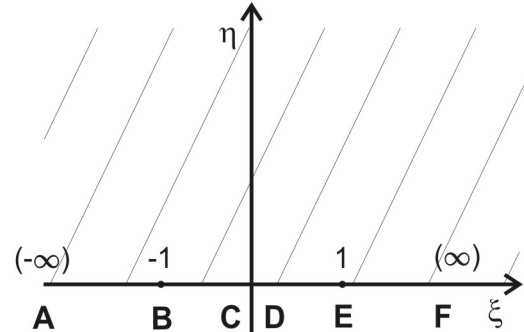
$$\vec{q} = -\lambda \nabla T .$$

∇T je temperaturni gradient in je vektor, ki je pravokoten na ploskve $T = \text{const}$ ter kaže v smeri največjega naraščanja temperature. Tako imenovani *operator nabla* v kartezičnih koordinatah zapišemo

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} ,$$



Slika 1.9: Prehod toplote skozi vogal

Slika 1.10: Schwarz-Christoffelova transformacija preslika notranjost dveh pravokotnih sten v zgornjo polovico ravnine (ξ, η)

pri čemer so $\vec{i}, \vec{j}$ in $\vec{k}$ enotski vektorji vzdolž koordinatnih osi. V stacionarnem stanju ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) se enačba (1.18) poenostavi v obliko

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

S takimi primeri se srečamo vedno, kadar obravnavamo prehod toplote skozi različne konstrukcijske sklope. Kot poseben primer vzemimo prehod toplote skozi dve ravni steni, ki se stikata pod pravim kotom (vogalni steni, slika 1.9). Če je višina sten dovolj velika, lahko rečemo, da je v stacionarnem stanju porazdelitev temperature taka, da velja $T = T(x, y)$ (os z kaže v navpični smeri) in zadošča Laplaceovi enačbi v ravnini:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (1.19)$$

Porazdelitev temperature $T(x, y)$ mora poleg tega, da je rešitev enačbe (1.19), zadoščati tudi robnim pogojem, ki jih opredelimo za vsak primer posebej. Vzemimo, da sta temperaturi na zunanji in notranji površini sten konstantni, tako da je temperatura na notranji steni T_1 , na zunanji pa $T_2 < T_1$ ter teče toplota iz notranjosti navzven. Robne pogoje torej zapišemo

$$T(x, y) = \begin{cases} T_1, & \text{če } (x, y) \in \text{notranje površine stene} \\ T_2, & \text{če } (x, y) \in \text{zunanje površine stene.} \end{cases}$$

To so tudi edini robni pogoji, če vzamemo, da so stene neskončno razsežne. Nalogo lahko v celoti rešimo z uporabo analitičnih funkcij in konformne preslikave, v tem primeru tako imenovane *Schwarz-Christoffelove transformacije*. Schwartz-Christoffelova transformacija $x + iy = f(\xi + i\eta)$, ki poljuben prečni presek obravnavanega konstrukcijskega sklopa v ravnini (x, y) preslika v zgornjo polovico kompleksne ravnine (ξ, η) , je

$$x + iy = -2\frac{L}{\pi} \tan^{-1}(\beta) + 2\frac{L}{\pi} \ln(1 + \beta) - \frac{L}{\pi} \ln(1 - \beta^2), \quad (1.20)$$

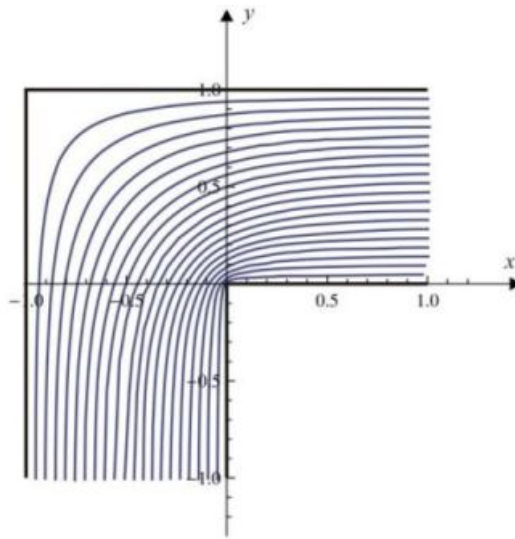
pri čemer smo označili

$$\beta = \left(\frac{\xi + i\eta - 1}{\xi + i\eta + 1} \right)^2. \quad (1.21)$$

Zunanji in notranji rob preseka, kjer sta temperaturi konstantni, se preslika v os ξ (slika 1.10). Označimo porazdelitev temperature v ravnini (ξ, η) s $T(\xi, \eta)$. Račun pokaže, da je

$$T(\xi, \eta) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{2\pi i} \ln \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta} \right) \equiv T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\pi} \Im [\ln(\xi + i\eta)]. \quad (1.22)$$

Oznaka $\Im$ pomeni, da moramo upoštevati le imaginarni del funkcije, ki sledi. Enačba (1.22) vsaki točki v zgornji polovici ravnine (ξ, η) priredi ustrezno vrednost temperature. S pomočjo enačb (1.20) in (1.21) pa lahko določimo temperature v ustreznih točkah v ravnini (x, y) . Na ta način narišemo izoterme, tj. krivulje v ravnini (x, y) , na katerih ima temperatura stalno vrednost in so hkrati presečišče ploskev $T(x, y, z) = \text{const}$ z ravnino (x, y) . Skrajni izoterme sta zunanji in notranji rob izbranega preseka, kjer sta temperaturi T_2 in T_1 (sl. 1.11).



Slika 1.11: Izoterme, kakor jih določajo enačbe (1.20) – (1.22)

Toplotni tok, ki teče skozi segment vogala z višino h , je v stacionarnem stanju enak skozi vsako izotermalno ploskev. Najpripravnejše je, da ga izračunamo na notranji površini vogala na segmentu

širine x , merjeno od vogala vzdolž notranje površine ene stene in širine y vzdolž druge stene, kar nam da

$$P = \lambda \left[h(x+y) \frac{T_1 - T_2}{L} + 0,559 h (T_1 - T_2) \right]. \quad (1.23)$$

Drugi člen v gornji enačbi je prispevek vogala k toplotnemu toku skozi izbrani segment konstrukcijskega sklopa.

Pri gornjem računu nismo upoštevali termalnih plasti na notranji in zunanji površini sklopa. V termalnih plasteh, kot že vemo, se pojavijo temperaturni skoki, ki so pri danih vrednostih prestopnih koeficientov tem večji, čim večja je gostota toplotnega toka. Ker je gostota toka

$$q = \frac{P}{h(x+y)} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \left(1 + 0,559 \frac{L}{x+y} \right)$$

blizu vogala (ko je $x, y \approx L$) povečana, je tam povečan tudi temperaturni skok v primerjavi s temperaturnim skokom daleč proč od vogala. Temperatura stene ob vogalu je torej nižja kot daleč proč, kar lahko privede, zlasti v zimskem času, do kondenzacije vlage in posledično plesni, (enačbo (1.23) smo izpeljali ob predpostavki L/x in $L/y \ll 1$, zato ta ugotovitev pomeni le približno oceno stanja).

1.5 Nestacionarni pojavi

Pri nestacionarnih pojavih se porazdelitev temperature v snovi spreminja s časom. Določimo jo tako, da rešimo enačbo (1.4) ali (1.18), ki jo moramo dopolniti z začetnim pogojem, na primer s porazdelitvijo temperature $T(x, 0)$ ob začetnem času $t = 0$, in ustreznimi robnimi pogoji. Vzemimo, da je začetna porazdelitev temperature v palici z dolžino L neenakomerna in nas zanima, v kolikšnem času se temperatura v različnih delih palice izenačijo, če je toplotno izolirana od okolice. Da ocenimo ta čas, ni treba rešiti enačbe (1.4). Sklepamo takole. Čas, ki je potreben, da se temperature v različnih delih palice izenačijo, ni odvisen od velikosti temperatur. Če namreč temperature na različnih mestih povečamo za enak faktor, se za enak faktor poveča tudi gostota toplotnega toka. Edini fizikalni količini, ki vplivata na hitrost približevanja toplotnemu ravnovesju, sta termična difuzivnost snovi χ in temperaturni gradient ali karakteristična razdalja, na kateri se temperatura zaznavno spremeni. Za približno oceno lahko za to razdaljo vzamemo kar dolžino palice L . Ker je enota za termično difuzivnost m^2/s in za razdaljo m , sledi iz dimenzijske analize, da je edina preprosta kombinacija teh dveh količin, ki ima enoto časa, L^2/χ . Zato sklepamo, da je časovna skala, ki določa hitrost približevanja k toplotnemu ravnovesju v palici, reda velikosti

$$t \approx \frac{L^2}{\chi} = L^2 \frac{\rho c_p}{\lambda}. \quad (1.24)$$

Enako sklepamo tudi v naslednjem primeru. Vzemimo, da temperatura na površini telesa niha s frekvenco ν . To nihanje temperature se s prevajanjem toplote prenaša v notranjost telesa, pri čemer se v splošnem pojavijo tako imenovani *termalni* oz. *termični valovi*. Amplituda nihanja temperature pojema od površine proti notranjosti telesa. Zanima nas ocena, kako globoko (L) v notranjost telesa sežejo ta nihanja. Časovno skalo pojava očitno določa nihajni čas nihanja temperature $t = 1/\nu$. Iz enačbe (1.24) sledi

$$L \approx \sqrt{\chi t} = \sqrt{\frac{\chi}{\nu}}. \quad (1.25)$$

Če vzamemo betonski zid z debelino $L = 1$ m, gostoto $\rho = 2,1 \cdot 10^3$ kg/m³, specifično toploto $c_p \approx c_v \equiv c = 840$ J/kgK in toplotno prevodnostjo $\lambda = 1,4$ W/mK, potem iz enačbe (1.24) sledi, da je karakterističen čas za vzpostavitev toplotnega ravnovesja $t \approx 14$ dni. Podobno sledi iz enačbe (1.25), da je efektivna globina L , do koder se čuti vpliv nihanja zunanje temperature pri nihajnem času $t = t_0 \approx 12$ ur, enaka $L \approx 0,2$ m.

Vzemimo homogeno palico z dolžino L in konstantnim presekom S , ki ima temperaturo T_2 . Palica je ob straneh toplotno izolirana. V nekem trenutku, na primer ob $t = 0$, palico na enem koncu staknemo z velikim telesom (toplotnim rezervoarjem) s stalno temperaturo $T_1 > T_2$, na drugem pa vzdržujemo temperaturo T_2 . Zanima nas, po kolikšnem času se v palici vzpostavi stacionarno stanje in kako se porazdelitev temperature v njej spreminja s časom.

Koordinatno os x usmerimo vzdolž palice s koordinatnim izhodiščem na vročem koncu. Ko se v palici vzpostavi stacionarno stanje, temperatura v njej linearno pojema od levega konca, kjer je T_1 , proti desnemu koncu, kjer je T_2 . Zato je zelo pripravno, če porazdelitev temperature v palici v poljubnem trenutku zapišemo v tej obliki:

$$T(x, t) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x + \Theta(x, t) ,$$

kjer neznana funkcija $\Theta(x, t)$ zadošča enačbi

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} . \quad (1.26)$$

Da bo rešitev enačbe (1.26) popolnoma določena, moramo opredeliti začetni pogoj $T(x, 0)$ in robne pogoje $T(0, t)$ in $T(L, t)$, kot jih določa zastavljena naloga. Tako imamo

$$T(x, 0) = T_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x + \Theta(x, 0) ,$$

od koder sledi

$$\Theta(x, 0) = -(T_1 - T_2) \left(1 - \frac{x}{L}\right) . \quad (1.27)$$

Robni pogoji, ki jim mora zadoščati iskana funkcija $\Theta(x, t)$, pa so

$$T(0, t) = T_1 = T_1 + \Theta(0, t) ,$$

$$T(L, t) = T_2 = T_2 + \Theta(L, t)$$

in

$$\Theta(0, t) = \Theta(L, t) = 0 .$$

Zelo pogosta metoda za reševanje parcialnih diferencialnih enačb je tako imenovana *separacija spremenljivk*. To pomeni, da rešitev funkcije $\Theta(x, t)$ iščemo v obliki

$$\Theta(x, t) = f(t) g(x) .$$

Nastavek nesemo v enačbo (1.26) in dobimo

$$\frac{df}{dt} g = \chi f \frac{d^2 g}{dx^2} .$$

Ko obe strani dobljene enačbe delimo s $f g$, sledi

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \chi \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx^2} = \text{const} ,$$

kjer je izraz na levi odvisen samo od časa, izraz na sredini pa samo od koordinate x . Enakost obeh izrazov za poljubne pare spremenljivk je mogoča le, če sta izraza konstantna. Ker je v stacionarnem stanju $\Theta \equiv 0$, zahtevamo $\Theta(x, t \rightarrow \infty) = 0$. To dosežemo tako, da konstanto v prejšnji enačbi zapišemo $\text{const} = -\chi k^2$, kjer je k^2 neka pozitivna konstanta z enoto m^{-2} , katere vrednost moramo še določiti. Namesto parcialne diferencialne enačbe smo dobili dve navadni diferencialni enačbi:

$$\frac{df}{dt} + \chi k^2 f = 0 ,$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + k^2 g = 0 .$$

Prvo enačbo preprosto integriramo, v drugi pa prepoznamo enačbo harmoničnega nihanja, ki ima rešitev v obliki

$$\Theta(x, t) = e^{-\chi k^2 t} (A_k \sin kx + B_k \cos kx) .$$

Konstante A_k , B_k in k določimo s pomočjo začetnega in robnih pogojev. Sledi

$$\Theta(0, t) = e^{-\chi k^2 t} B_k = 0 , \quad (1.28)$$

$$\Theta(L, t) = e^{-\chi k^2 t} (A_k \sin kL + B_k \cos kL) = 0 .$$

Gornje pogoje izpolnimo tako, da izberemo $B_k = 0$, in $\sin kL = 0$, torej

$$k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Za vsako vrednost n -ja dobimo rešitev

$$\Theta(x, t) = e^{-\chi \pi^2 n^2 t / L^2} A_n \sin \frac{n \pi x}{L} .$$

Ker je parcialna diferencialna enačba, ki ji zadošča Θ linearna, smemo splošno rešitev zapisati kot vsoto rešitev za vse dovoljene vrednosti n . Tako imamo

$$\Theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\chi \pi^2 n^2 t / L^2} \sin \frac{n \pi x}{L} .$$

Zdaj upoštevamo še začetni pogoj (1.28), ki nam omogoča, da določimo konstante A_n . Sledi

$$-(T_1 - T_2) \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \sum_n A_n \sin \frac{n \pi x}{L}.$$

Enačbo na obeh straneh pomnožimo s $\sin \frac{m \pi x}{L}$ in integriramo po x od 0 do L . Dobimo

$$-(T_1 - T_2) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin \frac{n \pi x}{L} dx = \sum_m A_m \int_0^L \sin \frac{m \pi x}{L} \sin \frac{n \pi x}{L} dx.$$

Integral na levi je enak² $L/n\pi$, integral na desni pa

$$\int_0^L \sin \frac{m \pi x}{L} \sin \frac{n \pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{n,m},$$

kjer je $\delta_{n,m}$ Kroneckerjev delta, ki je definiran kot

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{če je } n = m \\ 0, & \text{če je } n \neq m. \end{cases}$$

Tako dobimo

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}(T_1 - T_2)$$

in porazdelitev temperature v palici za obravnavani primer je

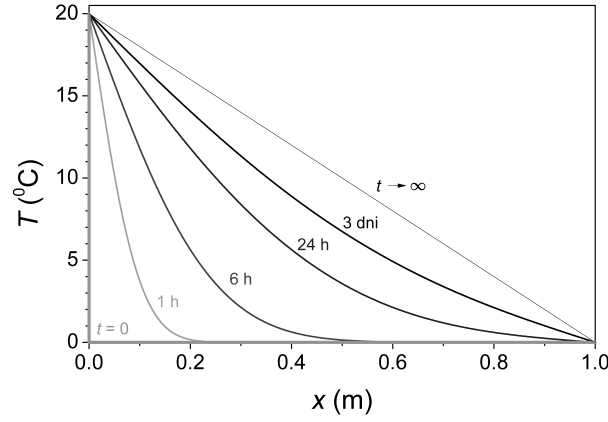
$$T(x, t) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x - 2(T_1 - T_2) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi \pi^2 n^2 t / L^2} \frac{\sin(n \pi x / L)}{n \pi}. \quad (1.29)$$

Porazdelitev je prikazana na sliki 1.12 za različne čase. Vsota v enačbi (1.29) hitro konvergira na račun faktorja n^2 v eksponentu, zato lahko v prvem približku za oceno upoštevamo v vsoti le prvi člen, katerega časovni faktor je $e^{-\chi \pi^2 t / L^2}$. Po času t , za katerega velja $\chi t = L^2$, je eksponentni faktor enak $e^{-\pi^2} \approx 10^{-4,3} = 5 \cdot 10^{-5}$, lahko rečemo, da je po tem času stacionarno stanje že praktično doseženo v skladu s tem, kar smo povedali na začetku tega razdelka. Če imamo 1 m dolgo bakreno palico s toplotno prevodnostjo $\lambda = 380 \text{ W/mK}$, gostoto $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ in specifično toploto $c = 385 \text{ J/kgK}$, je termična difuzivnost enaka $\chi = \lambda / \rho c = 111 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Čas, v katerem se vzpostavi stacionarno stanje, je za ta primer enak

$$t \approx \frac{L^2}{\chi} \approx 10^4 \text{ s} = 2,8 \text{ h}.$$

Če pa vzamemo betonski zid z debelino 1 m, gostoto $\rho = 2,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, toplotno prevodnostjo $\lambda = 1,4 \text{ W/mK}$ in specifično toploto $c = 840 \text{ J/kgK}$, je ustrezna termična difuzivnost enaka $\chi = \lambda / \rho c = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. V tem primeru se ob enakih pogojih stacionarno stanje vzpostavi v času $t \approx 14,5$ dni.

² $\int x \sin ax dx = -\frac{d}{da} \int \cos ax dx = -\frac{d}{da} \left(\frac{\sin ax}{a} \right) = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x}{a} \cos ax$



Slika 1.12: Temperatura v betonskem zidu za različne čase, kot jo podaja enačba (1.29) ($L = 1$ m, $\chi = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $T_1 = 20^\circ\text{C}$ in $T_2 = 0^\circ\text{C}$)

Poglejmo še, koliko toplote prejme palica do trenutka, ko se vzpostavi stacionarno stanje. Ker je bila temperatura palice na začetku enaka T_2 , v stacionarnem stanju pa je $T(x, t \rightarrow \infty) \equiv T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) x/L$, je toplota, ki jo prejme palica, enaka

$$Q = \int_0^L \rho S c (T(x) - T_2) dx = \rho S c (T_1 - T_2) \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} m c (T_1 - T_2),$$

kjer je c specifična toplota palice, $m = \rho S L$ pa njena masa. Toploto, ki jo prejme palica, lahko izračunamo tudi tako, da upoštevamo razliko med toplotnim tokom, ki ga palica prejema na vročem koncu $S q(0, t)$, in toplotnim tokom, ki ga oddaja na hladnem koncu $S q(L, t)$. Toplota Q je torej enaka

$$Q = S \int_0^\infty [q(0, t) - q(L, t)] dt.$$

Ustrezna toplotna tokova izračunamo s pomočjo enačbe (1.29) in dobimo

$$q(0, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi n^2 \pi^2 t/L^2} \right),$$

$$q(L, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \lambda \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi n^2 \pi^2 t/L^2} \cos n\pi \right).$$

Dobljene izraze vstavimo v gornji integral in dobimo,

$$Q = 2 \lambda S \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos n\pi) \int_0^\infty e^{-\chi n^2 \pi^2 t/L^2} dt = 2 \lambda S \left(\frac{T_1 - T_2}{L} \right) \frac{L^2}{\chi \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right).$$

Če upoštevamo, da je gornja vsota enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4},$$

in $\chi = \lambda/\rho c$, dobimo enak rezultat kakor pri prejšnjem preprostejšem računu.

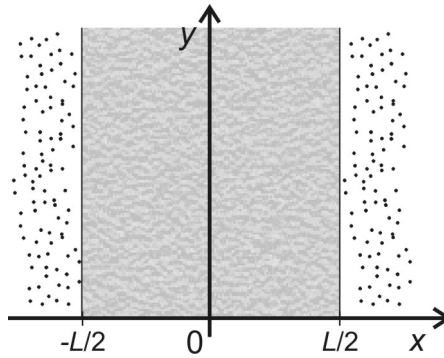
Primer 1.5: Raven navpični zid z debelino L in toplotno prevodnostjo λ je v toplotnem ravnovesju z okolico pri temperaturi T_2 (slika 1.13). V nekem trenutku ($t = 0$) se temperatura okoliškega zraka nenadoma zviša (v času, ki je majhen v primerjavi z L^2/χ) na temperaturo $T_1 > T_2$ in nato ostane stalna. Določi porazdelitev temperature v zidu v odvisnosti od časa! Upoštevaj, da je površina zidu dovolj velika, da teče toplota le v smeri pravokotno na površino zidu.

Rešitev: Porazdelitev temperature zapišimo v obliki $T(x, t) = T_1 + \Theta(x, t)$. Začetni in robni pogoji so

$$T(x, 0) = T_2 = T_1 + \Theta(x, 0) \rightarrow \Theta(x, 0) = -(T_1 - T_2) ,$$

$$T\left(\pm \frac{L}{2}, t\right) = T_1 = T_1 + \Theta\left(\pm \frac{L}{2}, t\right) \rightarrow \Theta\left(\pm \frac{L}{2}, t\right) = 0 ,$$

kjer smo koordinatno os x usmerili pravokotno na steno in koordinatno izhodišče postavili na polovico debeline stene. Če zanemarimo vpliv termalnih plasti ($h \rightarrow \infty$), je temperatura na površini zidu enaka temperaturi okoliškega zraka. V nasprotnem primeru je na površini zelo velik temperaturni gradient, ki povzroči, da se temperaturi „površine“ stene in zraka „v hipu“ izenačita.



Slika 1.13: Navpičen zid v toplotnem ravnovesju z okolico pri temperaturi T_2

Rešitev za funkcijo $\Theta(x, t)$ zapišemo enako kakor prej, to je

$$\Theta(x, t) = e^{-\chi k^2 t} (A_k \sin kx + B_k \cos kx) .$$

Iz fizikalnih razlogov zahtevamo $T(x, t) = T(-x, t)$ ali $\Theta(x, t) = \Theta(-x, t)$, kar pomeni, da je porazdelitev temperature v steni simetrična glede na simetralo stene, ki gre skozi koordinatno izhodišče. Ker je funkcija $\sin x$ liha, sledi

$$\Theta(x, t) = e^{-\chi k^2 t} B_k \cos kx .$$

Da zadostimo robnim pogojem, zahtevamo

$$\cos \frac{kL}{2} = 0 \rightarrow \frac{kL}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

in

$$\Theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\chi (2n+1)^2 \pi^2 t / L^2} B_n \cos \frac{(2n+1) \pi x}{L} .$$

Upoštevamo še začetni pogoj

$$\Theta(x, 0) \equiv -(T_1 - T_2) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{(2n+1)\pi x}{L}$$

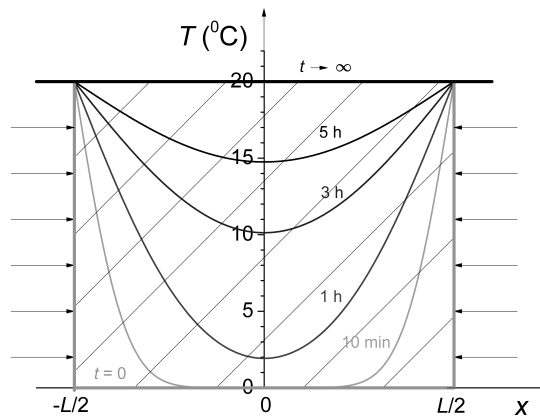
in

$$\int_{-L/2}^{L/2} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{L} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{n,m},$$

pa imamo

$$T(x, t) = T_1 - 4(T_1 - T_2) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\chi (2n+1)^2 \pi^2 t / L^2} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{L}}{(2n+1)\pi}.$$

Porazdelitev temperature v steni je za različne čase prikazana na sliki 1.14.



Slika 1.14: Segrevanje navpičnega zidu. Zid prejema toploto od okolice. $L = 0,3 \text{ m}$, $\chi = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (za beton), $T_1 = 20^\circ\text{C}$ in $T_2 = 0^\circ\text{C}$.

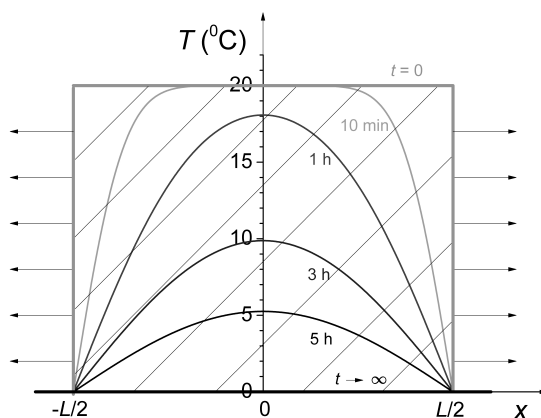
Počakajmo dovolj časa, da se vzpostavi toplotno ravnovesje, tako da ima zid enako temperaturo T_1 kakor okoliški zrak. Nato se v trenutku $t = 0$ temperatura okoliškega zraka zniža nazaj na T_2 in ostane stalna. Izračunajmo, kako se stena ohlaja!

Nalogo bi lahko rešili še enkrat tako kakor v prvem primeru, vendar to ni potrebno. Kratek premislek nas prepriča, da porazdelitev temperature v steni med ohlajanjem podaja gornji izraz, v katerem T_1 nadomestimo s T_2 in nasprotno. Tako imamo

$$T(x, t) = T_2 + 4(T_1 - T_2) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\chi (2n+1)^2 \pi^2 t / L^2} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{L}}{(2n+1)\pi}.$$

Ustrezna porazdelitev temperature za različne čase je prikazana na sliki 1.15.

Primer 1.6: Pokončen raven zid z debelino L in toplotno prevodnostjo λ je v toplotnem ravnovesju z okoliškim zrakom pri temperaturi T_2 . V nekem trenutku ($t = 0$) se temperatura okoliškega zraka poviša na T_1 in nato ostane stalna. Določi porazdelitev temperature v zidu v odvisnosti od časa pri predpostavki, da je ena stran zidu toplotno izolirana!



Slika 1.15: Ohlajanje navpičnega zidu, ki oddaja toploto okolici ($L = 0,3 \text{ m}$, $\chi = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (za beton))

Rešitev: Porazdelitev temperature zapišemo podobno kakor v prejšnjem primeru v obliki $T(x, t) = T_1 + \Theta(x, t)$. Od tod sledi

$$T(x, 0) = T_2 = T_1 + \Theta(x, 0) \rightarrow \Theta(x, 0) = -(T_1 - T_2),$$

Koordinatno os x zopet usmerimo pravokotno na površino zidu in koordinatno izhodišče postavimo na toplotno izolirano površino zidu (sl.1.16)). Ustrezni robni pogoji so v tem primeru

$$T(L, t) = T_1 = T_1 + \Theta(L, t) \rightarrow \Theta(L, t) = 0.$$

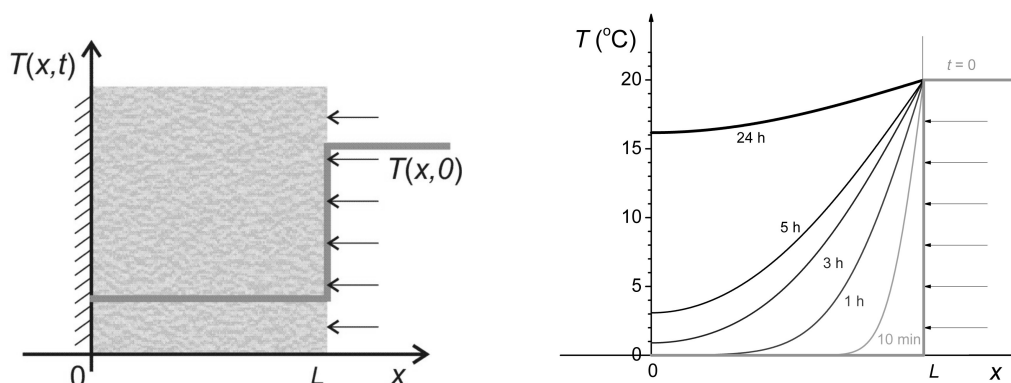
Na toplotno izolirani strani zidu pa moramo zahtevati, da je gostota toplotnega toka $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ enaka nič. To pomeni

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Naprej lahko računamo tako kakor v prejšnjih primerih, a če nas zanima le končni rezultat, to ni potrebno. V prvem delu prejšnje naloge smo ugotovili, da je porazdelitev temperature v zidu simetrična glede na ravnino (y, z) ($x = 0$). To pomeni, da je toplotni tok skozi prečni presek zidu, ki sovpada s to ravnino, enak 0. Prav to je naš robni pogoj na toplotno izolirani strani! Torej je porazdelitev temperature v zidu pri $x > 0$ taka, kakor jo zahtevamo v tokratni nalogi. Vse, kar moramo narediti, da zapišemo porazdelitev temperature v zidu, ki je na eni strani toplotno izoliran, je, da v rezultatu, ki smo ga dobili v prvem delu prejšnje naloge, nadomestimo L z $2L$. Tako dobimo

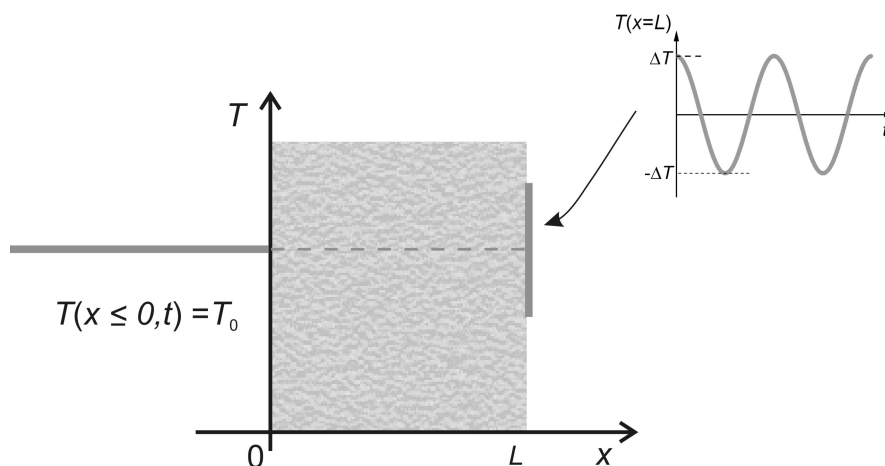
$$T(x, t) = T_1 - 4(T_1 - T_2) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\chi (2n+1)^2 \pi^2 t / 4L^2} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1) \pi x}{2L}}{(2n+1) \pi}.$$

V praksi imamo velikokrat opravka s časovnim spreminjanjem zunanje temperature, ki je zapletenejše kakor v gornjih dveh primerih, ko smo obravnavali le temperaturne skoke. Nalogo lahko posplošimo tako, da se skokovite spremembe temperature okoliškega zraka periodično ponavljajo. Vzemimo na primer zid iz gornje naloge, ki je v toplotnem ravnovesju z okoliškim zrakom pri temperaturi T_2 . V



Slika 1.16: Navpičen zid ($L = 0,3 \text{ m}$, $\chi = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (za beton)), ki je na eni strani (levi na sliki) toplotno izoliran ($q(0, t) = 0$, $T_1 = 20^\circ\text{C}$, $T_2 = 0^\circ\text{C}$)

trenutku $t = 0$ se temperatura zraka zviša na T_1 in ima to vrednost kratek časovni interval $t_0/2$. V naslednjem hipu se temperatura zraka zniža na prvotno vrednost T_2 in ostane stalna v času $t_0/2$. V trenutku $t = t_0$ se cikel ponovi in tako naprej. Temperatura zraka se spreminja nezvezno, vendar periodično s periodo t_0 . Porazdelitev temperature v zidu izračunamo posebej za vsak časovni interval, $n t_0/2 < t < (n + 1) t_0/2$, $n = 0, 1, 2 \dots$, tako, kakor smo to naredili v zgornji nalogi. Pri tem moramo upoštevati ustrezne robne pogoje in začetni pogoj $T_{n+1}(x, n \frac{t_0}{2}) = T_n(x, n \frac{t_0}{2})$. Brez računanja tudi vemo, da spreminjanje temperature v zidu lahko sledi spreminjanju temperature okoliškega zraka le, če je $t_0 \gg L^2/\chi$. V nasprotnem primeru je spreminjanje temperature v zidu dokaj zapleteno in kaže značilnosti valovanja.



Slika 1.17: Zunanja stena zgradbe. Temperatura v prostoru (na sliki leva stran stene) naj bo konstantna T_0 , zunanja naj periodično niha okoli T_0 .

Da bomo gornje trditve kvantitativno opredelili, si bomo v nadaljevanju ogledali primer, ko se zunanja temperatura zvezno spreminja. Vzemimo navpično steno z debelino L in toplotno prevodnostjo λ , ki je v toplotnem ravnovesju z okoliškim zrakom pri temperaturi T_0 (sl. 1.17). Naj bo to zunanja stena neke zgradbe, tako da je zrak na eni strani notranji zrak. Temperatura zunanjega zraka T_Z naj niha okrog ravnovesne lege po enačbi $T_Z(t) = T_0 + \Delta T \cos \omega t$. Temperatura notranjega zraka naj ostane stalna in enaka T_0 . Temperatura notranje površine stene, če zanemarimo vpliv termalnih plasti ($h \rightarrow \infty$), je torej ves čas enaka T_0 , zunanje pa T_Z . Koordinatni sistem izberemo kot po navadi tako, da je os x pravokotna na steno in koordinatno izhodišče postavimo na notranjo površino. Temperaturno porazdelitev v steni ponovno zapišemo v obliki $T(x, t) = T_0 + \Theta(x, t)$. Za nadaljnje računanje je primerno, da vpeljemo kompleksno temperaturo $\tilde{T}$, ki jo definiramo z enačbo

$$\tilde{T}_Z(t) = T_0 + \Delta T e^{-i\omega t} . \quad (1.30)$$

Dejansko temperaturo $T_Z(t)$ predstavlja le realni del izraza (1.30). Enako zapišemo tudi ustrezno kompleksno temperaturo $\tilde{\Theta}$, ki slej ko prej začne nihati tako kakor zunanja temperatura,

$$\tilde{\Theta}(x, t) = \tilde{\Theta}(x) e^{-i\omega t} .$$

Izraz vstavimo v enačbo za prevajanje toplote $\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, kar nam da

$$\frac{d^2 \tilde{\Theta}}{dx^2} + \frac{i\omega}{\chi} \tilde{\Theta} = 0 . \quad (1.31)$$

Označimo

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{i\omega}{\chi}} = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2\pi}{\chi t_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) \sqrt{\frac{2\pi}{l^2}} = \frac{\pi^{1/2}}{l} (1 + i) \equiv k (1 + i) .$$

$t_0 = 2\pi/\omega$ je nihajni čas, s katerim niha temperatura zunanjega zraka, in $l^2 = \chi t_0$. Splošna rešitev enačbe (1.31) je

$$\tilde{\Theta} = \tilde{A} \sin \tilde{k}x + \tilde{B} \cos \tilde{k}x .$$

Konstanti $\tilde{A}$ in $\tilde{B}$ določimo iz robnih pogojev, $\tilde{\Theta}(x=0) = 0$ in $\tilde{\Theta}(x=L) = \Delta T$. Sledi,

$$\tilde{\Theta}(x, t) = \Delta T \frac{\sin \tilde{k}x}{\sin \tilde{k}L} e^{-i\omega t} \equiv \Delta T \frac{\sin(kx + i kx)}{\sin(kL + i kL)} .$$

Če upoštevamo matematično relacijo

$$\sin(kx + i kx) = \sqrt{\sin^2 kx + \sinh^2 kx} \cdot e^{i\alpha(x)} ,$$

$$\tan \alpha(x) = \cot kx \cdot \tanh kx ,$$

dobimo,

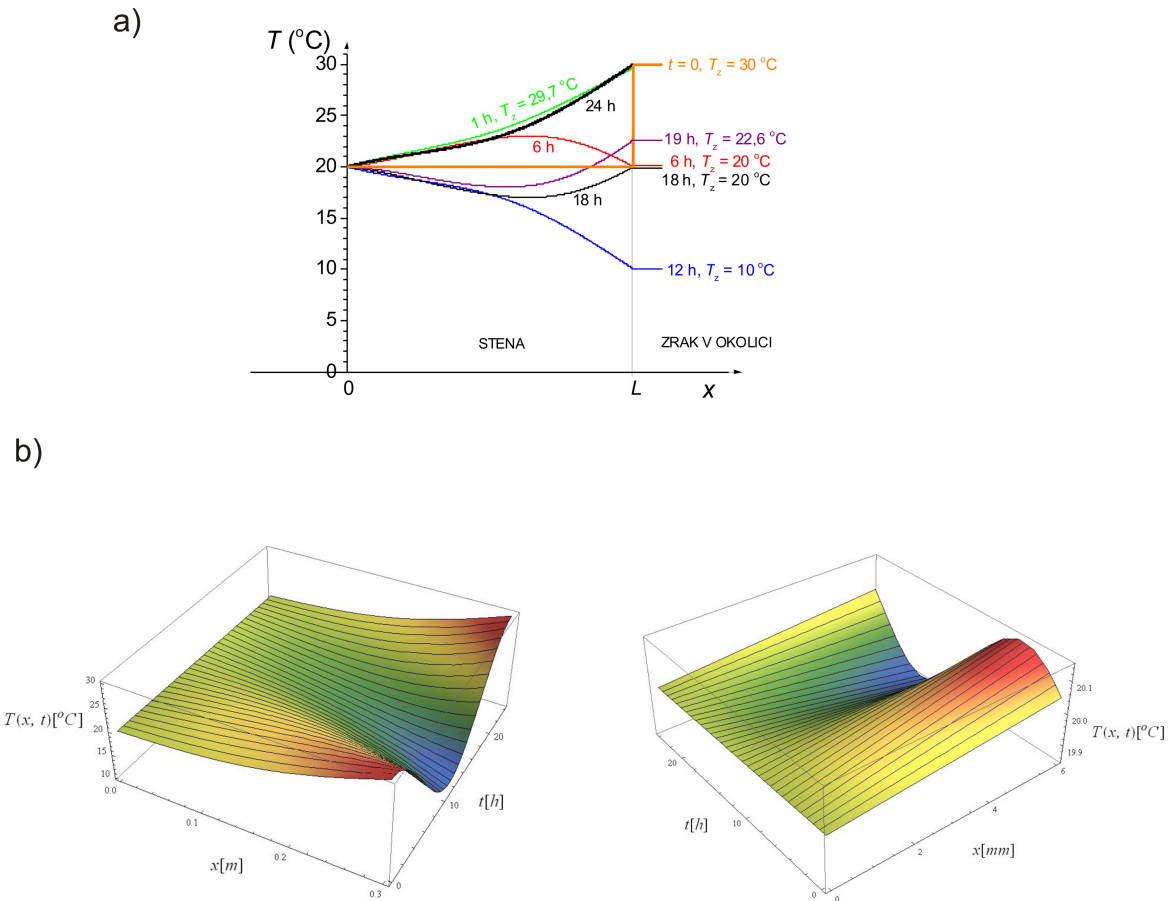
$$\tilde{\Theta}(x, t) = \Delta T \sqrt{\frac{\sin^2 kx + \sinh^2 kx}{\sin^2 kL + \sinh^2 kL}} e^{-i(\omega t + \alpha(L) - \alpha(x))}$$

$$\Theta(x, t) = \Delta T \sqrt{\frac{\sin^2 kx + \sinh^2 kx}{\sin^2 kL + \sinh^2 kL}} \cos(\omega t + \alpha(L) - \alpha(x)) .$$

Porazdelitev temperature v steni v odvisnosti od časa podaja torej enačba

$$T(x, t) = T_0 + \Delta T \sqrt{\frac{\sin^2 kx + \sinh^2 kx}{\sin^2 kL + \sinh^2 kL}} \cos(\omega t + \alpha(L) - \alpha(x)) , \quad (1.32)$$

ki je za različne čase prikazana na sliki 1.18.



Slika 1.18: a) Temperatura v steni ($L = 0,3 \text{ m}$, $\chi = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (za beton)) ob različnih časih, kakor jo opisuje enačba (1.32). Nihajni čas $t_0 = 24 \text{ h}$, zunanja temperatura niha z amplitudo $\Delta T = 10 \text{ K}$ okoli ravnovesne temperature. Opazimo, da temperatura v steni ne sledi hipoma zunanjim spremembam. Ob npr. 19 h je v večjem delu stene temperatura nižja od temperatur na obeh površinah stene. b) Enačba (1.32) v treh dimenzijah za isti primer, kot ga prikazuje slika a.

Kar nas še posebej zanima, je gostota toplotnega toka na različnih globinah stene. Iz zakona za prevajanje toplote (1.2) sledi

$$q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\lambda k \Delta T}{2} \frac{\sin 2kx + \sinh 2kx}{\sqrt{(\sin^2 kx + \sinh^2 kx)(\sin^2 kL + \sinh^2 kL)}} \cos(\omega t + \alpha(L) - \alpha(x)) \\ - \frac{\lambda k \Delta T}{2} \frac{\sin 2kx - \sinh 2kx}{\sqrt{(\sin^2 kx + \sinh^2 kx)(\sin^2 kL + \sinh^2 kL)}} \sin(\omega t + \alpha(L) - \alpha(x)) . \quad (1.33)$$

Podrobneje si oglejmo gostoto toplotnega toka na notranji površini stene ($x = 0$). Ko upoštevamo, da je $\alpha(x = 0) = \pi/4$, iz enačbe (1.33) sledi

$$q(0, t) = -\frac{\lambda k \Delta T \sqrt{2}}{\sqrt{\sin^2 kL + \sinh^2 kL}} \cos\left(\omega t + \alpha(L) - \frac{\pi}{4}\right) .$$

Razlikujemo dva različna režima prevajanja toplote, in sicer:

i) $kL \ll 1$ ali $L \ll l = \sqrt{\chi t_0}$. V tem primeru je $\alpha(L) \approx \pi/4$ in $q(0, t) \approx -\lambda \frac{\Delta T}{L} \cos \omega t$. Toplotni tok je relativno velik in niha v fazi z zunanjo temperaturo. To je zato, ker se pri nizkih frekvencah (velik nihajni čas) ter veliki toplotni prevodnosti stene (velika termična difuzivnost) v steni vzpostavi „kvazistacionarno stanje“, ki sledi nihanju temperature zunanjega zraka.

ii) $kL \gg 1$, $L \gg l$. Pri visokih frekvencah (kratek nihajni čas) in majhni toplotni prevodnosti je mehanizem prenosa toplote prepočasen, da bi se v steni vzpostavilo kvazistacionarno stanje. Preden toplota prodre globoko v steno, se predznak temperature glede na ravnovesno temperaturo na zunanji površini že spremeni. Kot bomo pokazali v nadaljevanju, se v steni pojavijo termalni valovi. Ker je $kL \gg 1$, velja $\tanh kL \approx 1$ in $\tan \alpha(L) = \cot kL = \tan\left(\frac{\pi}{2} - kL\right)$. Tako imamo

$$\alpha(L) \approx \frac{\pi}{2} - kL$$

in

$$q(0, t) = -\frac{\lambda \Delta T}{l} 2\sqrt{2\pi} e^{-kl} \cos\left(\omega t + \alpha(L) - \frac{\pi}{4}\right) .$$

Če upoštevamo $l = \sqrt{\chi t_0}$, $k = \frac{\sqrt{\pi}}{l} = \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$ in $kL = \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} L = \omega \frac{L}{\sqrt{2\omega\chi}}$, lahko gornji izraz zapišemo v povednejši obliki:

$$q(0, t) = -\frac{2\lambda \Delta T}{\sqrt{\chi/\omega}} e^{-L\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}} \cos\left[\omega\left(t - \frac{L}{\sqrt{2\omega\chi}}\right) + \frac{\pi}{4}\right] .$$

V zadnji enačbi prepoznamo po analogiji z enačbami iz valovanja fazno hitrost termičnih valov kot $\sqrt{2\omega\chi}$. Termično valovanje je pri prehodu skozi zid močno dušeno (e^{-kL}) in zaradi odvisnosti fazne hitrosti valovanja od frekvence ω kaže močno disperzijo.

Nestacionarne toplotne pojave v večplastnem zidu obravnavamo podobno kot prejšnje primere. Edina novost so mejni pogoji, ki jih moramo upoštevati na meji dveh plasti z različnimi toplotnimi lastnostmi. Na meji morata biti zvezna temperatura in gostota toplotnega toka. Vzemimo raven večplastni zid,

pri katerem teče toplota le v smeri pravokotno na zid in v tej smeri izberimo koordinatno os x . Temperaturo in toplotno prevodnost i -te plasti označimo z λ_i in T_i . Naj bo x koordinata mejne površine med plastema i in $i + 1$ enaka $x_{i,i+1}$. Mejne pogoje zapišemo v matematični obliki:

$$T_i(x_{i,i+1}, t) = T_{i+1}(x_{i,i+1}, t) ,$$

$$-\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=x_{i,i+1}} = -\lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=x_{i,i+1}} .$$

Kot poseben primer, ki naj ponazori gornje misli, rešimo naslednjo nalogo.

Primer 1.7: Določi porazdelitev temperature v odvisnosti od časa v dveh neskončno dolgih ravni palicah z enakim prečnim presekom in termičnima difuzivnostima χ_1 in χ_2 , ki se stikata na enem koncu! Začetna temperatura ene palice naj bo T_1 , druge pa $T_2 < T_1$. Koordinatno os x usmerimo vzdolž palic in koordinatno izhodišče postavimo v njuno stičišče.

Rešitev: Porazdelitev temperature v dveh neskončno dolgih palicah lahko določimo na več načinov. Največkrat se v tem primeru uporabi tako imenovana *Laplaceova transformacija*. Vendar se tej metodi v tem primeru lahko izognemo. Porazdelitev temperature v palicah zapišemo v obliki $T(x, t) = T_0 f(x, t)$, kjer je T_0 neka konstantna temperatura, značilna za zastavljeno nalogo. Neznana funkcija $f(x, t)$ je lahko odvisna le od neke brezdimenzijske spremenljivke, ki jo sestavimo iz koordinate x in časa t . Pri neskončno dolgih palicah je edina količina, ki ima enoto dolžine tako kakor x , količina $\sqrt{\chi}t$. To pomeni, da smemo porazdelitev temperature v eni in drugi palici zapisati v obliki

$$T(x, t) = T_0 f \left(\frac{x}{2\sqrt{\chi}t} \right) ,$$

kjer smo dodali faktor 2 zato, da se nato nekje pokrajša. Gornji nastavek nesemo v difuzijsko enačbo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

in dobimo

$$-\frac{1}{2}\xi f'(\xi) = \frac{1}{4} f''(\xi) ,$$

kjer smo zapisali $\xi = x/2\sqrt{\chi}t$ in $f'(\xi) = df/d\xi$. Gornjo enačbo preuredimo,

$$\frac{df'}{f'} = -2\xi d\xi$$

in integriramo. Dobimo

$$f'(\xi) = B e^{-\xi^2} ,$$

kjer je B integracijska konstanta. Označimo temperaturo v levi palici ($x < 0$) s $T_1(x, t)$, v desni ($x > 0$) pa s $T_2(x, t)$. Enačbo za $f'(\xi)$ še enkrat integriramo in za $x > 0$ dobimo

$$T_2(x, t) = A_2 + B_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\chi_2}t} e^{-\xi^2} d\xi \equiv A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\chi_2}t} \right) .$$

A_2 in B_2 sta integracijski konstanti, v katerih je skrita tudi konstantna temperatura T_0 , in

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1.$$

Enako določimo temperaturo v levi palici:

$$T_1(x, t) = A_1 + B_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\chi_1 t}}^0 e^{-\xi^2} d\xi = A_1 + B_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x/2\sqrt{\chi_1 t}} e^{-\xi^2} d\xi \equiv A_1 + B_1 \operatorname{erf}\left(\frac{-x}{2\sqrt{\chi_1 t}}\right).$$

Integracijske konstante določimo iz začetnih in mejnih pogojev (robna pogoja v obliki $q(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ sta že vsebovana v gornjih rešitvah za temperaturo v palicah),

$$T_1(x, 0) = T_1, \quad T_2(x, 0) = T_2,$$

$$T_1(0, t) = T_2(0, t),$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Ko vstavimo dobljene izraze za $T_1(x, t)$ in $T_2(x, t)$, sledi

$$T_1 = A_1 + B_1,$$

$$T_2 = A_2 + B_2,$$

$$A_1 = A_2,$$

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{\chi_1}} B_1 = -\frac{\lambda_2}{\sqrt{\chi_2}} B_2.$$

λ_1 in λ_2 sta toplotni prevodnosti leve ($x < 0$) in desne ($x > 0$) palice. Če označimo $\kappa = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\chi_2}{\chi_1}}$, sledi iz gornjih enačb

$$B_2 = -\kappa B_1,$$

$$A_1 = \frac{\kappa T_1 + T_2}{1 + \kappa}, \quad B_1 = \frac{T_1 - T_2}{1 + \kappa}.$$

Porazdelitev temperature v palicah tako zapišemo v obliki (slika 1.19):

$$T_1(x, t) = \frac{\kappa T_1 + T_2}{1 + \kappa} + \frac{T_1 - T_2}{1 + \kappa} \operatorname{erf}\left(\frac{-x}{2\sqrt{\chi_1 t}}\right),$$

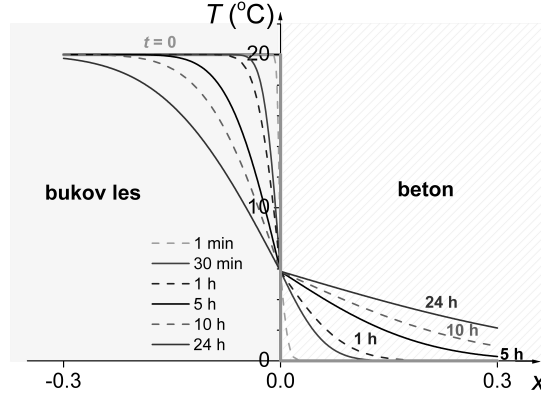
$$T_2(x, t) = \frac{\kappa T_1 + T_2}{1 + \kappa} - \frac{\kappa (T_1 - T_2)}{1 + \kappa} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi_2 t}}\right).$$

Iz gornjih rezultatov razberemo zanimive ugotovitve. Prvič, temperatura na stiku je stalna in enaka:

$$T_1(0, t) = T_2(0, t) = \frac{\kappa T_1 + T_2}{1 + \kappa}.$$

Hkrati je to tudi ravnovesna temperatura, to je temperatura, ki jo imata palici potem, ko se vzpostavi toplotno ravnovesje. To je

$$T_i(x, \infty) \equiv T_{eq}^{(\infty)} = T_i(0, t), \quad i = 1, 2.$$



Slika 1.19: Porazdelitev temperature v palicah za različne čase. Leva palica je iz bukovega lesa ($\lambda_1 = 0,18 \text{ W/mK}$, $\chi_1 = 0,092 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), desna iz betona ($\lambda_2 = 1,15 \text{ W/mK}$, $\chi_2 = 0,64 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$).

Rezultat ni nenavaden, je pa presenetljiv, če ga primerjamo z ravnovesno temperaturo dveh enako dolgih palic. Iz zakona o ohranitvi energije sledi (če predvidevamo, da se nič toplote ne izgubi v okolico):

$$T_1(x, \infty) = T_2(x, \infty) = \frac{\rho_1 c_1 T_1 + \rho_2 c_2 T_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} = \frac{\sqrt{\chi_2/\chi_1} \kappa T_1 + T_2}{1 + \sqrt{\chi_2/\chi_1} \kappa} \equiv T_{eq}^{(L)},$$

ki se očitno razlikuje od ustreznega rezultata $T_{eq}^{(\infty)}$ za enaki, a neskončno dolgi palici, čeprav ravnovesna temperatura v končnih in enako dolgih palicah ni odvisna od njune dolžine L . Na enak način sledi iz zakona o ohranitvi energije, da je ravnovesna temperatura v končnih, a različno dolgih palicah ($L_1 \neq L_2$) enaka

$$T_{eq}^{(L_1 \neq L_2)} = \frac{L_1 \rho_1 c_1 T_1 + L_2 \rho_2 c_2 T_2}{L_1 \rho_1 c_1 + L_2 \rho_2 c_2} = \frac{(L_1/L_2) \sqrt{\chi_2/\chi_1} \kappa T_1 + T_2}{1 + (L_1/L_2) \sqrt{\chi_2/\chi_1} \kappa}.$$

Če v zadnjem primeru izberemo razmerje dolžin palic $\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi_2}}$ in vstavimo v gornjo enačbo, sledi za ta poseben primer, da je ravnovesna temperatura enaka kakor pri neskončno dolgih palicah, to je

$$T_{eq}^{(L_1=L_2\sqrt{\chi_1/\chi_2})} = T_{eq}^{(\infty)}.$$

Podroben račun pokaže, da je porazdelitev temperature v odvisnosti od časa v palicah z razmerjem dolžin $\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi_2}}$ zelo podobna kot v neskončno dolgih palicah in še posebej pomembno je, da je temperatura na stiku tako v enem kakor drugem primeru stalna in enaka $T_{eq}^{(\infty)}$. V vseh drugih primerih končnih palic s poljubnim razmerjem dolžin temperatura na stiku v splošnem ni stalna. Imajo pa vsi ti primeri nekaj skupnega. Ko palici z različnima temperaturama staknemo, se na stiku takoj vzpostavi temperatura $T_{eq}^{(\infty)}$, ki je približno stalna, vse dokler je $\chi t \ll L^2$, za eno in drugo palico. Ko ta pogoj ni več izpolnjen, se temperatura na stiku začne spreminjati tako, da slej ko prej doseže ravnovesno temperaturo $T_{eq}^{(L_1 \neq L_2)}$, če je dolžina palic različna in $T_{eq}^{(L)}$, če sta dolžini enaki. Le pri neskončnih palicah ali palicah s prej omenjenim razmerjem dolžin je temperatura na stiku stalna. Ugotovitev, da je temperatura na stiku v vseh primerih enaka $T_{eq}^{(\infty)}$, če velja $\chi t \ll L^2$, je razumljiva, ker je pri tem pogoju toplotni tok na stiku neodvisen od dolžin palic.

Ko torej staknemo dve telesi z različnima temperaturama, je temperatura na stiku enaka $T_{eq}^{(\infty)}$ toliko časa, dokler velja za eno in drugo telo $\chi t \ll L^2$, kjer je L značilna razsežnost teles v smeri pravokotno na stik. Telo z višjo temperaturo ($T_1 > T_2$) se pri tem na majhnem območju stika z razsežnostjo približno $\sqrt{\chi t}$ ohladi za

$$T_1 - T_{eq}^{(\infty)} = T_1 - \frac{\kappa T_1 + T_2}{1 + \kappa} = \frac{T_1 - T_2}{1 + \kappa},$$

hladnejše pa se segreje za

$$T_{eq}^{(\infty)} - T_2 = \frac{\kappa T_1 + T_2}{1 + \kappa} - T_2 = \kappa \frac{T_1 - T_2}{1 + \kappa}.$$

Ko stopimo na primer z bosimi nogami s temperaturo $T_1 \approx 37^\circ\text{C}$ na hladna tla s temperaturo $T_2 \approx 17^\circ\text{C}$, se nam stopala ohladijo tem bolj, čim manjši je faktor

$$\kappa = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\chi_2}{\chi_1}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 \rho_1 c_1}{\lambda_2 \rho_2 c_2}}$$

in tem hladnejša se nam zdijo tla. Vzemimo, da so tla iz hrastovega lesa s toplotno prevodnostjo $\lambda_{\text{hrast}} \approx 0,17 \text{ W/mK}$, gostoto $\rho_{\text{hrast}} \approx 800 \text{ kg/m}^3$ in specifično toploto $c_{\text{hrast}} \approx 2 \text{ kJ/kgK}$; za stopala vzamemo enake toplotne lastnosti, kakor jih ima voda, torej $\lambda \approx 0,6 \text{ W/mK}$, $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$ ter $c \approx 4,2 \text{ kJ/kgK}$. Tedaj dobimo

$$\kappa = \sqrt{\frac{0,6 \text{ W/mK} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 4,2 \text{ kJ/kgK}}{0,17 \text{ W/mK} \cdot 800 \text{ kg/m}^3 \cdot 2 \text{ kJ/kgK}}} \approx 3.$$

Stopala se nam v tem primeru ohladijo za

$$\Delta T_{\text{hrast}} = \frac{T_1 - T_2}{1 + \kappa} = \frac{20 \text{ K}}{4} \approx 5 \text{ K}.$$

Če pa so tla betonska s toplotno prevodnostjo $\lambda_{\text{beton}} \approx 1,7 \text{ W/mK}$, gostoto $\rho_{\text{beton}} \approx 2400 \text{ kg/m}^3$ in specifično toploto $c_{\text{beton}} \approx 0,75 \text{ kJ/kgK}$, je ustrezeni faktor κ enak

$$\kappa = \sqrt{\frac{0,6 \text{ W/mK} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 4,2 \text{ kJ/kgK}}{1,7 \text{ W/mK} \cdot 2400 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,75 \text{ kJ/kgK}}} \approx 0,9.$$

in

$$\Delta T_{\text{beton}} = \frac{T_1 - T_2}{1 + \kappa} = \frac{20 \text{ K}}{1,9} \approx 10 \text{ K}.$$

Betonska tla, čeprav imajo enako temperaturo kakor hrastova, občutimo kot precej hladnejša.

1.6 Uporaba fazno spremenljivih vrst materiala v konstrukcijskih sklopih

V konstrukcijskih sklopih velikokrat uporabljajo kot posamezne plasti material, ki ima tako nizko temperaturo tališča, da pri prehodu toplote skozi sklop lahko pride do popolnega ali delnega taljenja snovi. Plasti takih snovi imenujemo **Fazno Spremenljive Plasti (FSP)**. Na račun toplote, ki je potrebna za stalitev, se FSP poveča njena notranja energija (v trdnih snoveh in kapljevinah je razlika med entalpijo³

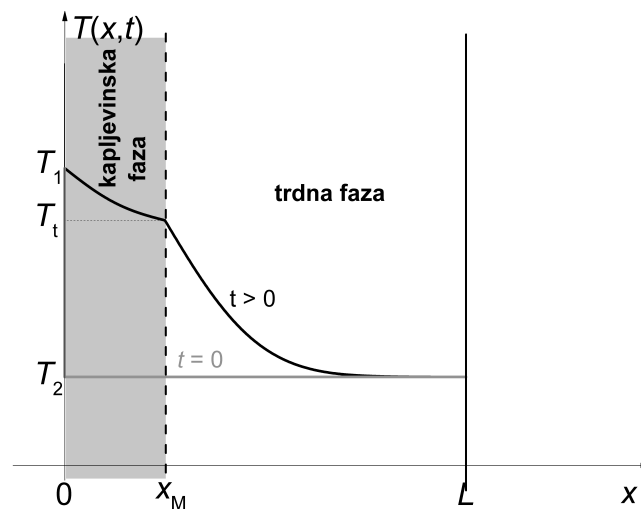
³Entalpija je termodinamska funkcija stanja, ki je definirana kot $H = W_n + P V$, pri čemer je W_n notranja energija snovi, in ima to lastnost, da je pri stalnem tlaku sprememba entalpije enaka toploti, ki jo snov prejme ali odda, $dH = dQ$.

in notranjo energijo razmeroma majhna in jo lahko zanemarimo). V nasprotnem primeru, ko se temperatura v sklopu ali delu sklopa zniža pod temperaturo tališča FSP, pa toploto vrne v okolico. Na ta način lahko z vgraditvijo FSP v konstrukcijski sklop zmanjšamo nihanja temperature v bivalnih prostorih, ki so posledica spreminjanja zunanje temperature, in hkrati dosežemo, da so posamezni konstrukcijski elementi sorazmerno lahki.

Za ponazoritev matematičnega opisa prenosa toplote skozi konstrukcijski sklop, ki vsebuje FSP, si oglejmo naslednji primer. Vzemimo FSP z debelino L in temperaturo $T_2 < T_t$, ki zapolnjuje prostor $0 < x < L$. Temperatura T_t je temperatura tališča snovi. V trenutku $t = 0$ se temperatura na površini $x = 0$ poviša na temperaturo $T_1 > T_t$, ki je potem stalna, hkrati pa temperaturo na površini $x = L$ vzdržujemo pri začetni vrednosti T_2 . V snovi se vzpostavi temperaturni gradient in toplota teče od površine $x = 0$ v smeri pozitivne osi x (slika 1.20). FSP se začne taliti, najprej ob površini $x = 0$, in meja med tekočo in trdno fazo se premika v smeri pozitivne osi x . Za vsako fazo posebej velja difuzijska enačba, ki jo že poznamo. Tako imamo

$$\text{trdna faza :} \quad \frac{\partial T_s}{\partial t} = \chi_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2},$$

$$\text{kapljevinska faza :} \quad \frac{\partial T_l}{\partial t} = \chi_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2},$$



Slika 1.20: Prenos toplote skozi fazno spremenljiv material.

Na meji med fazama ($x = x_M$) mora veljati zakon o ohranitvi energije. To pomeni, da se razlika med toploto, ki jo v časovnem intervalu dt prejme enota površine ravnine $x = x_M$ ($-\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \big|_{x=x_M} \cdot dt$), in toploto, ki jo v časovnem intervalu dt odda površinska enota ravnine $x = x_M$ ($-\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \big|_{x=x_M} \cdot dt$),

porabi za taljenje snovi, tako da velja

$$\left[\left(-\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=x_M} \right) - \left(-\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=x_M} \right) \right] dt = \rho q_t dx_M .$$

Predvideli smo, da sta gostoti kapljevine in trdne snovi približno enaki ($\rho_l \approx \rho_s = \rho$) in tako ni treba upoštevati spremembe prostornine pri taljenju ali strjevanju. S q_t smo označili specifično talilno toploto snovi. Če zadnjo enačbo na obeh straneh delimo z dt in jo malo preuredimo, sledi

$$\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=x_M} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=x_M} = \rho q_t \frac{dx_M}{dt} . \quad (1.34)$$

Ustrezni robni, mejni in začetni pogoji so:

$$T_l(x = x_M, t) = T_s(x = x_M, t) = T_t ,$$

$$T_l(x = 0, t) = T_1 ,$$

$$T_s(x = L, t) = T_2 ,$$

$$T_s(x, 0) = T_2 < T_t .$$

Naloga, ki smo jo pravkar opisali, v splošnem ni analitično rešljiva. Obstaja več numeričnih metod, od katerih je najprimernejša tako imenovana *entalpijska metoda*. V nadaljevanju se bomo omejili na preprostejši primer (slika 1.21), pri katerem bomo predvideli, da ima snov na začetku temperaturo tališča, tako da velja

$$T_s(x, 0) = T_2 \equiv T_t .$$

Nadalje bomo vzeli, da se snov tali tako počasi, da se v kapljevine vzpostavi kvazistacionarno stanje, za katero velja

$$T_l(x, t) = T_1 - \frac{T_1 - T_t}{x_M(t)} x .$$

Ker je $T_s = T_t = \text{const}$, iz enačbe (1.34) sledi

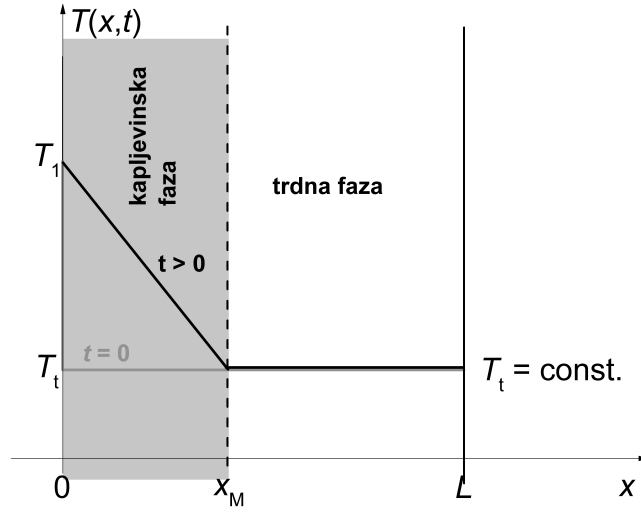
$$\rho q_t \frac{dx_M}{dt} = -\lambda_l \frac{dT_l}{dx} \Big|_{x=x_M} \equiv \lambda_l \frac{T_1 - T_t}{x_M} . \quad (1.35)$$

Enačbo prepišemo v obliki

$$x_M dx_M = \frac{\lambda_l (T_1 - T_t)}{\rho q_t} dt .$$

Obe strani enačbe integriramo:

$$\int_0^{x_M} x_M dx_M = \frac{\lambda_l (T_1 - T_t)}{\rho q_t} \int_0^t dt ,$$



Slika 1.21: Prenos toplote skozi fazno spremenljiv material pri pogoju, da je začetna temperatura enaka temperaturi tališča

pa imamo

$$x_M(t) = \left[\frac{2 \lambda_l (T_1 - T_t)}{\rho q_t} t \right]^{1/2}.$$

Če nas zanima čas, ki je potreben, da se stali plast snovi z debelino $x_M \leq L$, enačbo (1.35) preuredimo in dobimo

$$t = \left(\frac{\rho q_t}{2 \lambda_l (T_1 - T_t)} \right) x_M^2. \quad (1.36)$$

Gornje enačbe smo dobili na podlagi predpostavke o kvazistacionarnem stanju v kapljevinski fazi, za katero velja, da je potek temperature v kapljevini linearen. Da bomo ugotovili, kdaj je ta predpostavka upravičena, izračunajmo naslednjo količino:

$$\chi_l t = \frac{\lambda_l}{\rho c_l} \frac{\rho q_t}{2 \lambda_l (T_1 - T_t)} x_M^2 = \frac{x_M^2/2}{c_l (T_1 - T_t)/q_t} \equiv \frac{x_M^2/2}{Ste(l)},$$

pri čemer smo definirali *Stefanovo število* za kapljevinsko fazo:

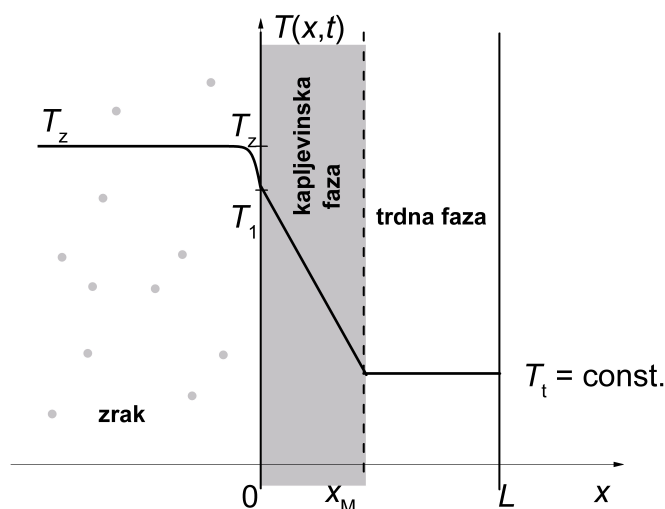
$$Ste(l) = \frac{c_l (T_1 - T_t)}{q_t}.$$

Če je Stefanovo število $Ste(l) \ll 1$, je $\sqrt{\chi_l t} \gg x_M$, in mehanizem prenosa toplote v kapljevini ima dovolj časa, da se vzpostavi kvazistacionarno stanje. Naša začetna predpostavka je torej upravičena, kadar je Stefanovo število kapljevinske faze majhno. Enako lahko izračunamo tudi debelino zmrznjene plasti, če imamo na začetku kapljevino pri temperaturi tališča in nato hipoma zmanjšamo temperaturo na površini $x = 0$ pod temperaturo tališča.

Če se temperatura na površini $x = 0$ spreminja s časom na znan način $T_1(t)$ in če to spreminjanje ni prehitro, tako da velja $\sqrt{\chi_1 t_0} \gg x_M$, kjer je t_0 karakterističen čas, v katerem se temperatura na površini znatno spremeni, širino kapljevinske plasti izračunamo enako kakor v prejšnjem primeru, le da moramo $T_1(t) - T_t$ obdržati pod integralnim znakom. Sledi

$$x_M(t) = \left[\frac{2 \lambda_l}{\rho q_t} \int_0^t (T_1(t) - T_t) dt \right]^{1/2}.$$

Primer 1.8: Določi čas taljenja za primer na sliki 1.21, če površina $x = 0$ meji na zrak s temperaturo $T_z > T_t$ in če je prestopni koeficient toplote iz zraka v kapljevino enak h (slika 1.22).



Slika 1.22: Prenos toplote skozi fazno spremenljiv material z upoštevanjem termalne plasti na meji med zrakom in tekočo fazo

Rešitev: Temperaturo $T_1(t)$ na površini $x = 0$ določimo z enačbo, ki zahteva, da je gostota toplotnega toka, ki prestopa iz zraka v kapljevino, enaka gostoti toplotnega toka, ki teče od površine kapljevine v notranjost. Tako imamo

$$h(T_z - T_1) = \lambda_l \frac{T_1 - T_t}{x_M}$$

in

$$T_1 = \frac{\frac{h x_M}{\lambda_l} T_z + T_t}{\frac{h x_M}{\lambda_l} + 1}.$$

Rezultat vstavimo v enačbo (1.35) in dobimo

$$x_M \frac{dx_M}{dt} = \frac{\lambda_l}{\rho q_t} \left(\frac{\frac{h x_M}{\lambda_l} T_z + T_t}{\frac{h x_M}{\lambda_l} + 1} - T_t \right) ;$$

to najprej preuredimo:

$$x_M \frac{dx_M}{dt} = \frac{\lambda_l}{\rho q_t} \frac{T_z - T_t}{\frac{\lambda_l}{h x_M} + 1}$$

in

$$\left(x_M + \frac{\lambda_l}{h}\right) dx_M = \frac{\lambda_l (T_z - T_t)}{\rho q_t} dt.$$

Enačbo integriramo in imamo

$$t = \frac{\rho q_t}{2 \lambda_l (T_z - T_t)} \left[x_M^2 + 2 \frac{\lambda_l x_M}{h} \right].$$

Nalogo rešimo še hitreje, če neposredno izračunamo gostoto toplotnega toka, ki priteka na mejo med kapljevinsko in trdno fazo. Imamo dve zaporedni plasti, in sicer termalno plast s prestopnim koeficientom h , ki ima enako vlogo kakor toplotna prepustnost staljene plasti z debelino x_M , $U_l = \lambda_l/x_M$. Skupno toplotno prepustnost U izračunamo po enačbi $1/U = 1/h + 1/U_l \equiv 1/h + x_M/\lambda_l$. Tako dobimo

$$q = U (T_z - T_t) = \frac{T_z - T_t}{\frac{1}{h} + \frac{x_M}{\lambda_l}} \equiv -\lambda_l \left. \frac{dT_l}{dx} \right|_{x=x_M}.$$

Rezultat vstavimo neposredno v enačbo (1.35) in po kratkem računu dobimo enak rezultat kakor zgoraj. Tako se izognemo računanju temperature T_1 na površini kapljevinske plasti.

V limiti $h \rightarrow \infty$ iz enačbe za T_1 sledi $T_1 \rightarrow T_z$ in dobimo rezultat (1.36). V nasprotnem primeru, ko je $h \ll \lambda_l/x_M$, je T_1 le malenkostno večji od T_t , tako da je skoraj celotna temperaturna razlika $T_z - T_t$ skoncentrirana v termalni plasti ob površini $x = 0$. Tedaj imamo

$$t \approx \frac{\rho q_t x_M}{h (T_z - T_t)}.$$

Ta mejni rezultat sledi tudi neposredno iz zakona o ohranitvi energije, ki zahteva $h (T_z - T_t) t = \rho q_t x_M$.

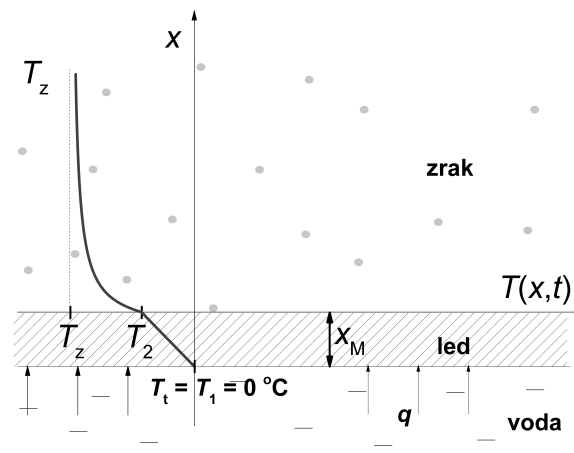
Primer 1.9: Nad gladino jezera piha veter s temperaturo zraka $T_z = -10^\circ\text{C}$. Temperatura vode ob gladini je $T_1 = T_t = 0^\circ\text{C}$. Če je koeficient prestopa toplote iz vode na zrak enak $40 \text{ W/m}^2\text{K}$, določi čas, ki je potreben, da se na gladini nabere 1 m debela plast ledu. Določi tudi temperaturo T_2 zgornje površine ledu (slika 1.23).

Rešitev: Specifična toplota ledu je $c_s = 2,1 \text{ kJ/kgK}$, toplotna prevodnost $\lambda_s = 2,1 \text{ W/mK}$, gostota ledu $\rho = 917 \text{ kg/m}^3$ in specifična talilna toplota $q_t = 334 \text{ kJ/kg}$. Stefanovo število za ledeno plast je v tem primeru enako

$$Ste(s) = \frac{c_s (T_t - T_2)}{q_t} < \frac{c_s (T_t - T_z)}{q_t} = \frac{2,1 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 10 \text{ K}}{334 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1}} = 0,063.$$

Ker je $Ste(s) \ll 1$, smemo vzeti, da se v ledeni plasti vzpostavi kvazistacionarno stanje, tako da je potek temperature v njej linearen. Če označimo z x_M debelino ledene plasti, je gostota toplotnega toka, ki ga voda oddaja v danem trenutku, enaka

$$q = \frac{T_t - T_z}{\frac{1}{h} + \frac{x_M}{\lambda_s}}.$$



Slika 1.23: Rast ledene plasti na gladini vode

Ko to vstavimo na desno stran enačbe (1.35), imamo

$$\rho q_t \frac{dx_M}{dt} = \frac{T_t - T_z}{\frac{1}{h} + \frac{x_M}{\lambda_s}}.$$

Enačbo malo preuredimo:

$$\left(x_M + \frac{\lambda_s}{h}\right) dx_M = \frac{\lambda_s}{\rho q_t} (T_t - T_z) dt$$

in po integriranju imamo

$$t = \frac{\rho q_t}{2 \lambda_s (T_t - T_z)} \left(x_M^2 + 2 \frac{\lambda_s x_M}{h} \right),$$

kar je enak rezultat kakor pri prejšnji nalogi in bi ga lahko kar prepisali ob ustrezni zamenjavi simbolov. Vstavimo podatke, pa dobimo

$$t = \frac{917 \text{ kg m}^{-3} \cdot 334 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1}}{2 \cdot 2,1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 10 \text{ K}} \left(1 \text{ m}^2 + 2 \frac{2,1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 1 \text{ m}}{40 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}} \right) = 8,06 \cdot 10^6 \text{ s} = 93,3 \text{ dni}.$$

Temperaturo T_2 na zgornji površini ledu določimo na primer po enačbi

$$h (T_2 - T_z) = q \equiv \frac{T_t - T_z}{\frac{1}{h} + \frac{x_M}{\lambda_s}},$$

kar nam da

$$T_2 = \frac{\frac{h x_M}{\lambda_s} T_z + T_t}{1 + \frac{h x_M}{\lambda_s}},$$

kar je podoben rezultat kot pri prejšnji nalogi. Razmerje $\frac{h x_M}{\lambda_s}$ je enako $\frac{h x_M}{\lambda_s} = \frac{40 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \cdot 1 \text{ m}}{2,1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}} = 19$. To vstavimo v gornjo enačbo, pa dobimo: $T_2 = -10 \text{ °C} \cdot 19/20 = -9,5 \text{ °C}$. Temperaturni skok v termalni plasti nad ledom je pri izbrani vrednosti toplotnega prestopnega koeficienta le $0,5 \text{ °C}$ in ga lahko brez škode zanemarimo.

Primer 1.10: FSP ima debelino L in temperaturo $T_t - \Delta T_s$. V trenutku $t = 0$ se temperatura na eni površini poviša na $T_t + \Delta T_l$ in ostane stalna. Temperaturo druge površine pa vzdržujemo na začetni vrednosti. Določi debelino staljenega dela FSP, potem ko se vzpostavi stacionarno stanje. Oцени tudi čas, ki je za to potreben. Vzemi, da sta gostoti kapljevine in trdne faze približno enaki.

Rešitev: Koordinatno os x usmerimo pravokotno na plast in izhodišče postavimo na površino z višjo temperaturo. Meja med fazama v stacionarnem stanju naj bo pri $x = \tilde{x}_M$. V stacionarnem stanju je potek temperature v eni in drugi fazi linearen in ga podajata enačbi

$$T_l = T_t + \Delta T_l - \frac{\Delta T_l}{\tilde{x}_M} x ,$$

$$T_s = T_t - \frac{\Delta T_s}{L - \tilde{x}_M} (x - \tilde{x}_M) .$$

Uporabimo enačbo (1.34) in zahtevamo, da v stacionarnem stanju velja $\frac{dx_M}{dt} = 0$. Sledi

$$\lambda_l \left. \frac{dT_l}{dx} \right|_{x=\tilde{x}_M} = \lambda_s \left. \frac{dT_s}{dx} \right|_{x=\tilde{x}_M} .$$

Uporabimo enačbe za T_l in T_s v stacionarnem stanju, pa imamo

$$\frac{\lambda_l \Delta T_l}{\tilde{x}_M} = \frac{\lambda_s \Delta T_s}{L - \tilde{x}_M} ,$$

kar nam da

$$\tilde{x}_M = \frac{L}{1 + \frac{\lambda_s \Delta T_s}{\lambda_l \Delta T_l}} \equiv \frac{L}{1 + \kappa} .$$

Vzemimo, da je FSP ledena plošča in da velja, $\Delta T_l = \Delta T_s$. V tem primeru imamo $\tilde{x}_M = \frac{L}{1 + \frac{\lambda_s}{\lambda_l}}$. Če upoštevamo $\lambda_l = 0,6 \text{ W/mK}$ in $\lambda_s = 2,1 \text{ W/mK}$, sledi $\tilde{x}_M = \frac{L}{1 + \frac{2,1}{0,6}} = 0,22 L$. Stali se torej 22 % ledu.

Čas taljenja ocenimo prav tako s pomočjo enačbe (1.34). V ta namen izračunajmo Stefanovi števili za vodo in led:

$$Ste(l) = \frac{c_l \Delta T_l}{q_t} = \frac{4,2 \text{ kJ/kgK}}{334 \text{ kJ/kg}} \Delta T_l \approx 0,013 \frac{\Delta T_l}{\text{K}} ,$$

$$Ste(s) = \frac{c_s \Delta T_s}{q_t} = \frac{2,1 \text{ kJ/kgK}}{334 \text{ kJ/kg}} \Delta T_s \approx 0,0063 \frac{\Delta T_s}{\text{K}} .$$

Iz gornjih izrazov sledi, da sta Stefanovi števili v eni in drugi fazi majhni v primerjavi z 1, če je $\Delta T_l \approx \Delta T_s \leq 10 \text{ K}$. V tem primeru lahko vzamemo, da se med taljenjem FSP v eni in drugi fazi vzpostavi kvazistacionarno stanje in smemo za temperature v obeh fazah zapisati

$$T_l = T_t + \Delta T_l - \frac{\Delta T_l}{x_M} x ,$$

$$T_s = T_t - \frac{\Delta T_s}{L - x_M} (x - x_M) ,$$

torej podobno, kakor smo zgoraj zapisali za stacionarno stanje. Ta dva nastavka vnesemo v enačbo (1.34) in imamo

$$\frac{\lambda_l \Delta T_l}{x_M} - \frac{\lambda_s \Delta T_s}{L - x_M} = \rho q_t \frac{dx_M}{dt} .$$

Enačbo malo preuredimo:

$$dt = \frac{\rho q_t}{\lambda_l \Delta T_l} \frac{x_M (L - x_M)}{L - (1 + \kappa) x_M} dx_M$$

in

$$t = \frac{\rho q_t}{\lambda_l \Delta T_l} \int_0^{x_M} \frac{x_M (L - x_M)}{L - (1 + \kappa) x_M} dx_M .$$

Integral hitro izračunamo, če vpeljemo novo spremenljivko $u = L - (1 + \kappa) x_M$. Sledi

$$t = \frac{\rho q_t \tilde{x}_M^2}{2 \lambda_l \Delta T_l} \frac{1}{1 + \kappa} \left\{ \frac{x_M^2}{\tilde{x}_M^2} - 2 \kappa \left[\frac{x_M}{\tilde{x}_M} + \ln \left(1 - \frac{x_M}{\tilde{x}_M} \right) \right] \right\} . \quad (1.37)$$

Ko je $\kappa = 0$, dobimo že znani rezultat (1.36). Pri $\kappa \neq 0$ pa gre $t \rightarrow \infty$, ko gre $x_M \rightarrow \tilde{x}_M$. To je zato, ker gre $dx_M/dt \rightarrow 0$, ko gre $x_M \rightarrow \tilde{x}_M$. Karakterističen čas τ , ki določa približevanje k stacionarnemu stanju, je očitno

$$\tau \approx \frac{\rho q_t \tilde{x}_M^2}{\lambda_l \Delta T_l} = \frac{\tilde{x}_M^2}{\chi_l Ste(l)} .$$

Za $\Delta T_l = \Delta T_s = 10$ K in ledeno ploščo debeline 10 cm sledi

$$\tau = \frac{917 \text{ kg m}^{-3} \cdot 334 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \cdot (0,22)^2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}{0,6 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 10 \text{ K}} \approx 24700 \text{ s} \approx 7 \text{ h} .$$

Če v enačbi (1.37) izberemo $\frac{x_M}{\tilde{x}_M} = 0,99$, sledi za izbrane podatke

$$t \approx \tau \frac{\kappa}{1 + \kappa} \left(\ln 10^2 - 1 + \frac{1}{2 \kappa} \right) \approx 3 \tau \approx 21 \text{ h} .$$

Enačbo za čas taljenja (1.37) prepišimo v naslednji obliki:

$$-(1 + \kappa) \frac{t}{\tau} = \kappa \xi_M + \kappa \ln(1 - \xi_M) - \frac{1}{2} \xi_M^2 , \quad (1.38)$$

kjer smo označili $\xi_M = \frac{x_M}{\tilde{x}_M}$, $0 \leq \xi_M \leq 1$. Za majhne čase ($t \rightarrow 0$, $\xi_M \rightarrow 0$) velja $\ln(1 - \xi_M) \approx -\xi_M - \frac{1}{2} \xi_M^2 - \dots$ in enačbo (1.38) poenostavimo,

$$-(1 + \kappa) \frac{t}{\tau} \approx -(1 + \kappa) \xi_M^2 .$$

Za majhne čase torej velja

$$\xi_M(t) \approx \sqrt{2 \frac{t}{\tau}} .$$

Nasprotno pa lahko za dolge čase ($t \rightarrow \infty$ in $\xi_M \rightarrow 1$) zapišemo $\xi_M = 1 - \eta_M$, kjer je $\eta_M \ll 1$. Če v enačbi (1.38) na desni strani obdržimo le člen $\ln \eta_M$, imamo tako

$$\eta_M \approx e^{-\left(\frac{1+\kappa}{\kappa}\right) \frac{t}{\tau}}$$

oziroma

$$\xi_M \approx 1 - e^{-\left(\frac{1+\kappa}{\kappa}\right) \frac{t}{\tau}} .$$

1.7 Sevanje segrelih teles

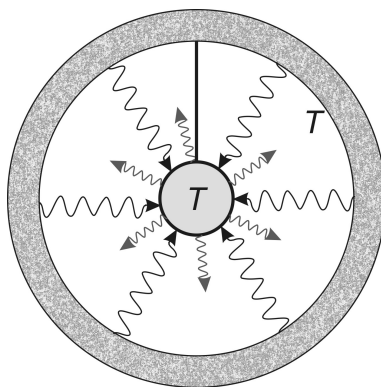
Vsa segreta telesa zaradi termičnega gibanja gradnikov oddajajo energijo v obliki elektromagnetnega valovanja. Ta pojav imenujemo *termično sevanje*. Vzemimo, da telo izmenjava energijo z okolico le v obliki sevanja. V toplotnem ravnovesju telo okolici odda v časovni enoti enako množino energije v obliki elektromagnetnega valovanja, kakor jo od nje prejme. Elektromagnetno valovanje, ki prihaja iz okolice, se na površini telesa deloma absorbira, preostanek pa se odbije, če vzamemo, da telo ne prepušča vpadnega valovanja. Za telo v toplotnem ravnovesju z okolico tako velja, da je množina izsevane energije enaka množini absorbirane energije v časovni enoti. Poskusi pokažejo, da je množina energije, ki jo telo izseva v časovni enoti, odvisna od absolutne temperature površine telesa T in njenih fizikalnih značilnosti.

Vzemimo veliko votlo kroglo, ki jo vzdržujemo pri stalni temperaturi T . V središču krogle visi na tanki nitki (prevajanje toplote po nitki zanemarimo) majhna kroglica (slika 1.24). S poskusom se lahko prepričamo, da se slej ko prej vzpostavi toplotno ravnovesje. Takrat ima kroglica enako temperaturo T kakor votla krogla. *Energijski tok* P predstavlja energijo, ki jo kroglica izseva v časovni enoti. Nadalje z j označimo množino energije, ki jo dobi enota površine kroglice v časovni enoti od okolice. Zaradi krogelne simetrije je gostota vpadnega toka j enaka za vsak površinski element kroglice, tako da v toplotnem ravnovesju velja

$$P = a S j ,$$

kjer je S površina kroglice a pa njena *vpojnost* ali *absorptivnost* in predstavlja delež vpadle energije ($S j$), ki jo kroglica absorbira. Prepišimo gornjo enačbo v obliki

$$\frac{P/S}{a} = j . \quad (1.39)$$



Slika 1.24: Toplotno ravnovesje se vzpostavi s sevanjem in absorpcijo elektromagnetnega valovanja

Če je kroglica dovolj majhna, je gostota vpadnega toka j odvisna le od temperature votle krogle, nič pa od snovi, iz katere je kroglica. Zato sklepamo, da enačba (1.39), ki velja za toplotno ravnovesje,

velja za vsako kroglico ne glede na njeno sestavo in fizikalne lastnosti njene površine. To ugotovitev imenujemo *Kirchhoffov zakon*. Iz same definicije absorptivnosti sledi

$$0 \leq a \leq 1 .$$

Telo, za katero je $a = 1$, imenujemo *črno telo*. Če označimo kvocient $\frac{P}{S}$ z j^* ter z $j_{(\text{č.t.})}^*$ površinsko gostoto izsevane energije za črno telo, sledi iz Kirchhoffovega zakona

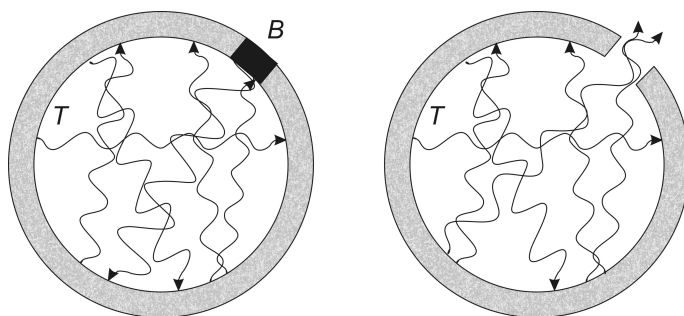
$$\frac{j_{(\text{č.t.})}^*}{1} = \frac{j^*}{a} \quad (1.40)$$

oziroma

$$j^* = a j_{(\text{č.t.})}^* \leq j_{(\text{č.t.})}^* .$$

Množina energije, ki jo pri dani temperaturi izseva enota površine telesa, je največja za črno telo.

Pomudimo se še malo pri votli krogli, ki jo vzdržujemo pri stalni temperaturi T (slika 1.25). Krogla je lahko narejena iz poljubne snovi, le majhen delček stene, označen z B , naj seva kakor črno telo. To pomeni, da notranja površina delčka B absorbira vse valovanje, ki pade nanj. Ker imamo toplotno ravnovesje, je množina energije, ki jo prejme B v časovni enoti, enaka energiji, ki jo B odda v časovni enoti. Ker smo vzeli, da B seva kakor črno telo, sledi, da je gostota vpadnega toka na površini delčka B enaka gostoti izsevanega energijskega toka črnega telesa $j_{\text{č.t.}}^*$. Če odstranimo delček B , bo nastala odprtina v plašču votle krogle za zunanjšega opazovalca sevala kakor črno telo s temperaturo T , če je površina delčka B majhna v primerjavi s površino krogle. Tako lahko v praksi ustvarimo črno telo, čeprav stene votle krogle v splošnem ne sevajo kakor črno telo. Enako velja za elektromagnetno valovanje, ki pada na površino luknjice z zunanje strani. Tudi v tem primeru se luknjica obnaša kakor črno telo in vse vpadlo valovanje absorbira. Če je luknjica dovolj majhna, je namreč verjetnost, da bi kaj valovanja, ki je šlo skozi luknjico v notranjost votle krogle po večkratnih odbojih na notranji površini ušlo nazaj ven, zanemarljivo majhna.



Slika 1.25: Model črnega telesa

Množino energije, ki jo črno telo z absolutno temperaturo T in površino S izseva v časovni enoti, določa *Stefan-Boltzmannov zakon*,

$$P = S \sigma T^4 ,$$

kjer je $\sigma = 5,672 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ Stefan-Boltzmannova konstanta. Za telo, ki ni črno, sledi iz enačbe (1.40), da je izsevani energijski tok enak

$$P = a S \sigma T^4 ,$$

Absorptivnost telesa a , kakor sledi iz enačbe (1.40), torej lahko razumemo tudi kot razmerje med površinsko gostoto izsevanega energijskega toka nečrnega telesa in površinske gostote izsevanega energijskega toka črnega telesa. To pa hkrati pomeni, da je absorptivnost telesa a enaka njegovi emisivnosti e , ki jo definiramo z enačbo

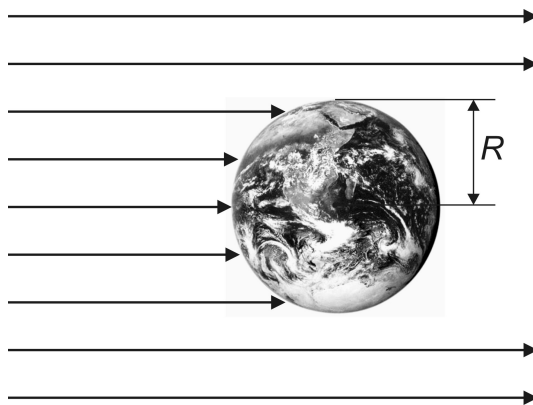
$$P = e S \sigma T^4 . \quad (1.41)$$

Torej,

$$e = a = 1 - r ,$$

kjer je koeficient r odbojnost površine telesa, to je razmerje med gostoto odbitega energijskega toka in gostoto vpadnega energijskega toka (pri tem smo vzeli, da telo ne prepušča nič valovanja). V splošnem sta tako absorptivnost kakor tudi odbojnost odvisni še od valovne dolžine elektromagnetnega valovanja. Za telesa, pri katerih je $a = e = \text{const}$ in ki sevajo po enačbi (1.41), pravimo, da so *siva telesa*.

Primer 1.11: Sonce seva približno kakor črno telo. Vsak kvadratni meter površine Zemlje, ki je pravokotna na smer sončnih žarkov, prejme energijski tok okrog 1360 W , če zanemarimo absorpcijo v atmosferi ($j_z = 1360 \text{ W/m}^2$). Kolikšen je celotni izsevni energijski tok Sonca, koliko od tega prejme Zemlja (absorpcijo v atmosferi zanemarimo) in kolikšna je temperatura površine Sonca? Povprečna oddaljenost Zemlje od Sonca je $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, polmer Sonca $R_s = 6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$ in polmer Zemlje je $R_z = 6371 \text{ km}$.



Slika 1.26: Energijski tok, ki ga prejme Zemlja od Sonca

Rešitev: Ker je gostota izsevanega energijskega toka Sonca na oddaljenosti Zemlje $j_S^*(r)$ enaka $j_z = 1360 \text{ W/m}^2$ in ker Sonce seva enakomerno v vseh smereh, sledi

$$P_s = j_S^*(r) 4\pi r^2 = j_z 4\pi r^2 = 1360 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 4\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \approx 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W} .$$

Za primerjavo povejmo, da je toplotna moč reaktorja v Jedrski elektrarni Krško enaka $2 \cdot 10^9$ W. Od energijskega toka, ki ga odda Sonce, Zemlja prejme (slika 1.26)

$$dP_z = j_z 2 \pi R_z \sin \theta R_z d\theta \cos \theta$$

in

$$P_z = j_z 2 \pi R_z^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = j_z 2 \pi R_z^2 \int_0^1 \sin \theta d \sin \theta = j_z \pi R_z^2 \approx 1360 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 = 1,8 \cdot 10^{17} \text{ W} .$$

Do istega rezultata pridemo s premislekom, da Zemlja od Sonca prestreza energijski tok j_z na površini S , ki je enaka prečnemu preseku Zemlje $S = \pi R_z^2$, in je potem $P_z = j_z S = j_z \pi R_z^2$.

Na splošno lahko zapišemo, $\frac{P_z}{P_s} = \frac{j_z \pi R_z^2}{j_z 4 \pi r^2} = \left(\frac{R_z}{2r}\right)^2$.

Temperaturo površine Sonca določimo s pomočjo Stefan-Boltzmannovega zakona. Tako imamo

$$P_s = \sigma 4 \pi R_s^2 T_s^4 = j_z 4 \pi r^2$$

in

$$T_s = \left(\frac{j_z}{\sigma} \left(\frac{r}{R_s} \right)^2 \right)^{1/4} = \left(\frac{1360 \text{ Wm}^{-2}}{5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}} \left(\frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{6,95 \cdot 10^8 \text{ m}} \right)^2 \right)^{1/4} \approx 5760 \text{ K} .$$

V splošnem telo poleg tega, da oddaja v okolico energijo v obliki sevanja, prav tako tudi dobiva od okolice energijo v obliki sevanja. Del energije, ki jo telo dobi od okolice, se v telesu absorbira in se spremeni v notranjo energijo, del pa se odbije. Ali se bo telo ohlajalo ali segrevalo, je torej odvisno od razlike med izsevanim in absorbiranim energijskim tokom. V toplotnem ravnovesju sta ta dva deleža, kot smo že povedali, enaka. Pokaže se, da je prenos energije s sevanjem pomemben dejavnik pri prenosu toplote, še posebej pri visokih temperaturah.

Kot primer si oglejmo prenos toplote s sevanjem med dvema (neskončnima) vzporednima ravnima stenama s temperaturama T_1 in $T_2 < T_1$ (slika 1.27). V skladu z drugim zakonom termodinamike pričakujemo, da se bo toplota prenašala s sevanjem od stene z višjo temperaturo na steno z nižjo temperaturo. Označimo površinsko gostoto oddanega energijskega toka ene in druge površine z $j_i^{(o)}$ in površinsko gostoto prejetega energijskega toka z $j_i^{(p)}$, pri čemer je $i = 1, 2$. Tedaj lahko zapišemo:

$$j_1^{(o)} = e_1 \sigma T_1^4 + r_1 j_1^{(p)} \quad (1.42)$$

in

$$j_2^{(o)} = e_2 \sigma T_2^4 + r_2 j_2^{(p)} \quad (1.43)$$

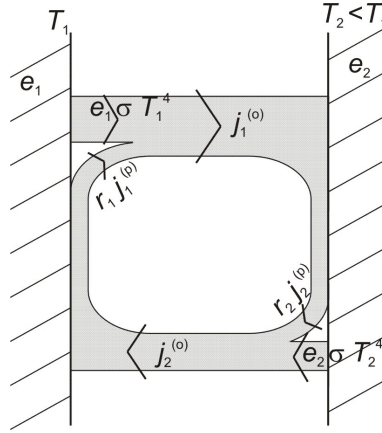
Iz zakona o ohranitvi energije sledi

$$j_1^{(o)} = j_2^{(p)} , \quad (1.44)$$

$$j_2^{(o)} = j_1^{(p)} . \quad (1.45)$$

Gostota neto oddanega energijskega toka prve stene je torej enaka

$$j \equiv j_1^{(o)} - j_1^{(p)} = j_2^{(p)} - j_2^{(o)} , \quad (1.46)$$



Slika 1.27: Gostota energijskega toka j , ki se s sevanjem prenaša s toplejše na hladnejšo površino $j = j_1^{(o)} - j_2^{(o)} \equiv j_1^{(o)} - j_1^{(p)} \quad (j_1^{(o)} = j_2^{(p)}; j_2^{(o)} = j_1^{(p)})$.

pri čemer smo upoštevali enačbi (1.44) in (1.45). V enačbi (1.42) na obeh straneh odštejemo $j_1^{(p)}$, v enačbi (1.43) pa $j_2^{(p)}$. Iz enačbe (1.46) tedaj dobimo

$$j = e_1 \sigma T_1^4 - (1 - r_1) j_1^{(p)}, \quad (1.47)$$

$$-j = e_2 \sigma T_2^4 - (1 - r_2) j_2^{(p)}. \quad (1.48)$$

Enačbo (1.47) pomnožimo na obeh straneh z e_2 , enačbo (1.48) pa z e_1 , upoštevajmo $1 - r_i = e_i$ ter dobljeni enačbi odštejemo eno od druge. Sledi

$$j (e_1 + e_2) = e_1 e_2 \sigma (T_1^4 - T_2^4) + e_1 e_2 (j_2^{(p)} - j_1^{(p)}).$$

Upoštevajmo (1.44) in (1.46), dobljeno enačbo malo preuredimo, pa dobimo

$$j = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1}. \quad (1.49)$$

Toplota se torej prenaša v obliki sevanja od toplejše stene h hladnejši. Gostota toplotnega toka, ki ga s toplejše stene odnaša sevanje, je sorazmerna razliki četrtih potenc absolutnih temperatur sten. Če je ena od sten črna, na primer $e_2 = 1$, se enačba (1.49) poenostavi:

$$j = e_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4).$$

Do rezultata (1.49) lahko pridemo tudi z neposrednim izračunom tokov $j_1^{(o)}$ in $j_1^{(p)}$:

$$j_1^{(o)} = e_1 \sigma T_1^4 [1 + r_2 r_1 + (r_2 r_1)^2 + \dots] + r_1 e_2 \sigma T_2^4 [1 + r_2 r_1 + (r_2 r_1)^2 + \dots] = \frac{e_1 \sigma T_1^4 + r_1 e_2 \sigma T_2^4}{1 - r_1 r_2}.$$

Zdaj upoštevamo enačbo (1.45), kjer $j_2^{(0)}$ določimo s pomočjo izraza za $j_1^{(o)}$, v katerem samo zamenjamo indekse $1 \leftrightarrow 2$. Sledi

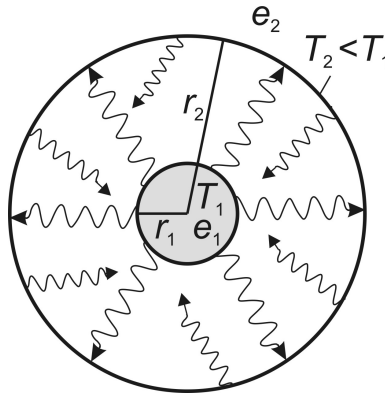
$$j_1^{(p)} = j_2^{(o)} = \frac{r_2 e_1 \sigma T_1^4 + e_2 \sigma T_2^4}{1 - r_1 r_2}$$

in

$$j = j_1^{(o)} - j_1^{(p)} = \frac{(e_1 \sigma T_1^4 + r_1 e_2 \sigma T_2^4) - (r_2 e_1 \sigma T_1^4 + e_2 \sigma T_2^4)}{1 - r_1 r_2} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1}.$$

Za ponazoritev gornjih enačb si bomo ogledali nekaj sorazmerno preprostih zgledov, ki pa vseeno vsebujejo vse značilnosti primerov, ki jih običajno srečamo v praksi.

Primer 1.12: Določi prenos toplote s sevanjem med dvema koncentričnima krogelama s polmeroma r_1 in r_2 , ki imata temperaturi T_1 in T_2 (slika 1.28). Emisivnosti ustreznih površin krogel sta e_1 in e_2 .



Slika 1.28: Prenos energije s sevanjem med koncentričnima krogelama. Vsak površinski element dS ene ali druge krogle seva v polprostor.

Rešitev: Nalogo rešimo tako, kakor smo to naredili za dve ravni in vzporedni steni. Razlika je le v tem, da je zdaj pripravnejše, če računamo neposredno s toplotnimi tokovi, ki jih posamezna površina odda ali prejme, in ne z njihovimi površinskimi gostotami. Oddane in prejete energijske tokove ene ali druge površine označimo s $P_i^{(o)}$ in $P_i^{(p)}$, $i = 1, 2$. Tako imamo:

$$P_1^{(o)} = e_1 S_1 \sigma T_1^4 + (1 - e_1) P_1^{(p)}, \quad (1.50)$$

$$P_2^{(o)} = e_2 S_2 \sigma T_2^4 + (1 - e_2) P_2^{(p)}, \quad (1.51)$$

pri čemer smo upoštevali $r_i = 1 - a_i = 1 - e_i$. Površini krogel sta $S_1 = 4\pi r_1^2$ in $S_2 = 4\pi r_2^2$. Razlika z dvema enakima vzporednima stenama nastane v naslednjem koraku. Toplotni tok $P_1^{(p)}$, ki ga prejema

površina notranje krogle, je namreč le del toka $P_2^{(o)}$, ki ga oddaja notranja površina zunanje krogle tako, da velja

$$P_1^{(p)} = F P_2^{(o)} .$$

Vpeljali smo tako imenovani *geometrijski faktor* F , ki je odvisen od oblike in velikosti sevalnih površin in njune medsebojne orientacije. Geometrijski faktor F je čisto geometrijska količina, ki jo izračunamo za vsak par sevalnih površin, ki nastopajo v danem problemu. Če bi obravnavali na primer sevanje med stenami sobe v obliki kvadra, imamo tak faktor za vsak par površin. Podobno enačbo zapišemo tudi za prejeti sevalni tok, ki ga prejme površina zunanje krogle. Sledi:

$$P_2^{(p)} = P_1^{(o)} + (1 - F) P_2^{(o)} = P_1^{(o)} + \frac{1 - F}{F} P_1^{(p)} , \quad (1.52)$$

pri čemer smo upoštevali, da notranja površina večje krogle prejme celoten tok, ki ga oddaja manjša krogla (ustrezen geometrijski faktor je torej 1), in tudi delež $(1 - F)$ svojega lastnega oddanega toka. Tako kakor v prejšnjem primeru nas tudi zdaj zanimajo le neto oddani ali prejeti tokovi posamezne površine. Naj bo P_1 neto tok, ki ga oddaja površina notranje krogle, P_2 pa neto tok, ki ga oddaja notranja površina zunanje krogle. Glede na gornje oznake velja

$$P_1 = P_1^{(o)} - P_1^{(p)} , \quad (1.53)$$

$$P_2 = P_2^{(o)} - P_2^{(p)} = \frac{P_1^{(p)}}{F} - P_1^{(o)} - \frac{1 - F}{F} P_1^{(p)} \equiv -P_1 . \quad (1.54)$$

Ko se na primer ena krogla ohlaja, se druga segreva, kar je preprosta posledica zakona o ohranitvi energije. Zdaj v enačbi (1.50) na levi in desni strani odštejemo $P_1^{(p)}$, v enačbi (1.51) pa $P_2^{(p)}$, upoštevamo definiciji (1.53) in (1.54) ter enačbo (1.52), pa imamo

$$\begin{aligned} P_1 &= e_1 S_1 \sigma T_1^4 - e_1 P_1^{(p)} , \\ -P_1 &= e_2 S_2 \sigma T_2^4 - e_2 P_2^{(p)} \equiv e_2 S_2 \sigma T_2^4 - e_2 P_1 - \frac{e_2}{F} P_1^{(p)} . \end{aligned}$$

V naslednjem koraku prvo od gornjih dveh enačb pomnožimo na obeh straneh z e_2/F , drugo pa z e_1 ter ju medsebojno odštejemo in preuredimo. Sledi

$$P_1 = \frac{S_1 \sigma T_1^4 - F S_2 \sigma T_2^4}{\frac{1}{e_1} + F \left(\frac{1}{e_2} - 1 \right)} .$$

Vse, kar nam še preostane, je, da določimo geometrijski faktor F . Kakor smo že omenili, ga lahko v vsakem primeru izračunamo tako, da podrobno opredelimo energijske tokove, ki jih prejemajo ali oddajajo infinitezimalni površinski elementi dS na posameznih sevalnih površinah. V učbenikih, ki se ukvarjajo s prenosom toplote s sevanjem, so ti faktorji za standardne sevalne površine v tipičnih medsebojnih legah že izračunani⁴. Mi bomo spodaj navedli ustrezne vrednosti geometrijskih faktorjev za sobo v obliki kvadra. Za primer dveh koncentričnih krogel pa lahko faktor F zelo preprosto določimo z naslednjim fizikalnim premislekom. Vzemimo, da sta krogli v toplotnem ravnovesju, to je $T_1 = T_2$. V tem primeru je $P_1 = -P_2 = 0$. Če upoštevamo dobljeni rezultat za P_1 , ko velja $T_1 = T_2$, sledi

$$S_1 = F S_2 \rightarrow F = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 .$$

⁴R. Siegel, R. Howell: *Thermal Radiation Heat Transfer*, McGraw-Hill (1972).

Tako imamo končni rezultat:

$$P_1 = \frac{S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{e_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{e_2} - 1 \right)} .$$

Če je polmer notranje krogle veliko manjši od notranjega polmera zunanje krogle, $r_1 \ll r_2$, sledi

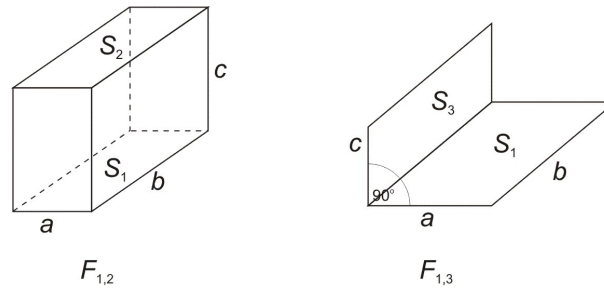
$$P_1 = e_1 S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) .$$

Toplotni tok, ki ga notranja kroglica izgublja, je neodvisen od emisivnosti večje krogle. Zanimiv je tudi primer, ko je $r_1, r_2 \gg r_2 - r_1$. Tedaj imamo:

$$P_1 = \frac{S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1} ,$$

rezultat, ki ga že poznamo in velja v enaki obliki tudi za dve veliki ravni vzporedni steni ne glede na to, za koliko sta razmaknjeni.

Dodatek



Slika 1.29: Konfiguracija površin (S_1, S_2) in (S_1, S_3) za geometrijske faktorje $F_{1,2}$ in $F_{1,3}$. Naj bo $F_{i,j}$ geometrijski faktor, ki določa delež energije, ki jo izseva površina S_i in jo sprejme površina S_j . Potem velja $S_i F_{i,j} = S_j F_{j,i}$.

V sobi v obliki kvadra s stranicami a, b, c imamo samo dve različni medsebojni orientaciji sevalnih površin (slika 1.29). Geometrijski faktor za par (S_i, S_j) označimo s $F_{i,j}$. Za nasprotno ležeče vzporedne sevalne ploskve je geometrijski faktor enak:

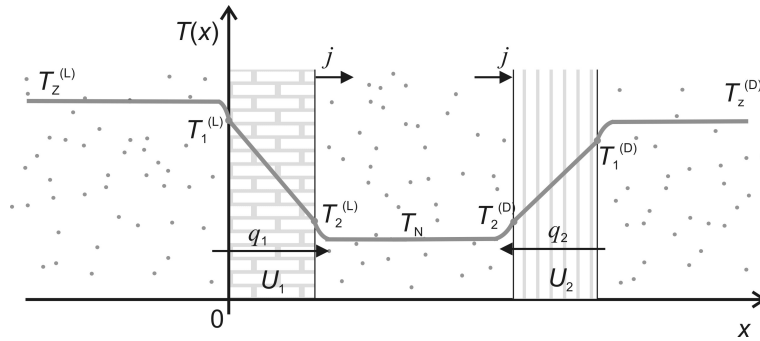
$$F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{2}{\pi x y} \left\{ \ln \left[\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+x^2+y^2} \right]^{\frac{1}{2}} + x \sqrt{1+y^2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} \right) \right\} + \\ \frac{2}{\pi x y} \left\{ y \sqrt{1+x^2} \tan^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}} \right) - x \tan^{-1} x - y \tan^{-1} y \right\} ,$$

kjer je $x = a/c$ in $y = b/c$. Geometrijski faktor za sevalne površine, ki so pravokotne ena na drugo in imajo en skupen rob, je enak:

$$F_{1,3} = \frac{1}{\pi x} \left\{ x \tan^{-1} \frac{1}{x} + y \tan^{-1} \frac{1}{y} - \sqrt{x^2+y^2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right\} + \\ \frac{1}{4\pi x} \ln \left\{ \left[\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+x^2+y^2} \right] \left[\frac{x^2(1+x^2+y^2)}{(1+x^2)(x^2+y^2)} \right]^{x^2} \left[\frac{y^2(1+x^2+y^2)}{(1+y^2)(x^2+y^2)} \right]^{y^2} \right\} ,$$

kjer je spet $x = a/b$ in $y = c/b$. $F_{3,1} = F_{1,3} S_1/S_3$.

Primer 1.13: Med dvema vzporednima stenama, katerih toplotni prepustnosti sta U_1 in U_2 , vzdržujemo stalno temperaturo T_N (slika 1.30). Temperatura zraka na zunanji strani ene in druge stene naj bo $T_z^{(L)}$, $T_z^{(D)} > T_N$. Gostoti neto sevalnega toka na zunanji površini sten označimo z $j_{sol}^{(L)}$ in $j_{sol}^{(D)}$. Določi gostoto toplotnega toka, ki priteka iz zunanosti v prostor med stenama in temperaturne skoke na notranjih površinah sten. Emisivnosti notranjih površin sten sta e_1 in e_2 , toplotni prestopni koeficienti pa so za vse površine enaki h .



Slika 1.30: Prenos toplote iz okolice v prostor med navpičnima stenama

Rešitev: Označimo gostoto toplotnega toka, ki je v splošnem sestavljen iz prispevkov konvekcije, kondukcije in sevanja, s q . V stacionarnem stanju imamo tako (vse temperature, ki nastopajo v enačbah, ki sledijo, so absolutne temperature)

$$q_1 = h \left(T_z^{(L)} - T_1^{(L)} \right) + j_{sol}^{(L)} \equiv h \left[\left(T_z^{(L)} + \frac{j_{sol}^{(L)}}{h} \right) - T_1^{(L)} \right],$$

$$q_1 = U_1 \left(T_1^{(L)} - T_2^{(L)} \right),$$

$$q_1 = h \left(T_2^{(L)} - T_N \right) + j,$$

kjer je j gostota neto sevalnega toka, ki ga oddaja notranja površina leve stene, in ga prejema notranja površina desne stene. V skladu z enačbo (1.49) in oznakami temperatur na sliki 1.30 velja

$$j = \frac{\sigma \left[\left(T_2^{(L)} \right)^4 - \left(T_2^{(D)} \right)^4 \right]}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1}.$$

Podobne enačbe zapišemo za desno steno. Sledi:

$$q_2 = h \left(T_z^{(D)} - T_1^{(D)} \right) + j_{sol}^{(D)} \equiv h \left[\left(T_z^{(D)} + \frac{j_{sol}^{(D)}}{h} \right) - T_1^{(D)} \right],$$

$$q_2 = U_2 \left(T_1^{(D)} - T_2^{(D)} \right),$$

$$q_2 = h \left(T_2^{(D)} - T_N \right) - j .$$

Da bodo enačbe v nadaljevanju enostavnejše, redefiniramo zunanje temperature na levi in desni tako, da nadomestimo $T_z^{(L)} + \frac{j_{sol}^{(L)}}{h} \rightarrow T_z^{(L)}$ in $T_z^{(D)} + \frac{j_{sol}^{(D)}}{h} \rightarrow T_z^{(D)}$. Zgornje enačbe tako še enkrat prepišemo takole:

$$q_1 = h \left(T_z^{(L)} - T_1^{(L)} \right) ,$$

$$q_1 = U_1 \left(T_1^{(L)} - T_2^{(L)} \right) ,$$

$$q_1 = h \left(T_2^{(L)} - T_N \right) + j ,$$

in

$$q_2 = h \left(T_z^{(D)} - T_1^{(D)} \right) ,$$

$$q_2 = U_2 \left(T_1^{(D)} - T_2^{(D)} \right) ,$$

$$q_2 = h \left(T_2^{(D)} - T_N \right) - j ,$$

Iz gornjih enačb brez težav izračunamo količine, po katerih vprašuje naloga. Tako dobimo

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{h \left(T_z^{(L)} - T_N \right)}{2 + \frac{h}{U_1}} + \left(\frac{1}{2 + \frac{h}{U_1}} \right) \cdot j , \\ q_2 &= \frac{h \left(T_z^{(D)} - T_N \right)}{2 + \frac{h}{U_2}} - \left(\frac{1}{2 + \frac{h}{U_2}} \right) \cdot j , \\ T_2^{(L)} - T_N &= \frac{T_z^{(L)} - T_N}{2 + \frac{h}{U_1}} - \frac{1 + \frac{h}{U_1}}{2 + \frac{h}{U_1}} \cdot \frac{j}{h} , \\ T_2^{(D)} - T_N &= \frac{T_z^{(D)} - T_N}{2 + \frac{h}{U_2}} + \frac{1 + \frac{h}{U_2}}{2 + \frac{h}{U_2}} \cdot \frac{j}{h} , \\ T_2^{(L)} - T_2^{(D)} &= \frac{T_z^{(L)} - T_N}{2 + \frac{h}{U_1}} - \frac{T_z^{(D)} - T_N}{2 + \frac{h}{U_2}} - \left(\frac{1 + \frac{h}{U_1}}{2 + \frac{h}{U_1}} + \frac{1 + \frac{h}{U_2}}{2 + \frac{h}{U_2}} \right) \cdot \frac{j}{h} . \end{aligned} \quad (1.55)$$

Gostota celotnega toplotnega toka, ki priteka v prostor med stenama, je

$$q = q_1 + q_2 = \frac{h \left(T_z^{(L)} - T_N \right)}{2 + \frac{h}{U_1}} + \frac{h \left(T_z^{(D)} - T_N \right)}{2 + \frac{h}{U_2}} + \left(\frac{\frac{h}{U_2} - \frac{h}{U_1}}{\left(2 + \frac{h}{U_1} \right) \left(2 + \frac{h}{U_2} \right)} \right) \cdot j .$$

Če hočemo med stenama vzdrževati stalno temperaturo T_N , moramo ravno toliko toplote, kakor jo v časovni enoti priteka v prostor med stenama, odvesti s primerno hladilno napravo. Če zanemarimo sevanje, je gostota toplotnega toka pri danih zunanjih pogojih enaka:

$$q|_{j=0} = \frac{h \left(T_z^{(L)} - T_N \right)}{2 + \frac{h}{U_1}} + \frac{h \left(T_z^{(D)} - T_N \right)}{2 + \frac{h}{U_2}} .$$

Zaradi sevanja se gostota toplotnega toka poveča ali zmanjša za delež

$$\left(\frac{\frac{h}{U_2} - \frac{h}{U_1}}{\left(2 + \frac{h}{U_1}\right) \left(2 + \frac{h}{U_2}\right)} \right) \cdot j ,$$

ki je lahko pozitiven ali negativen. Sevalni tok j je pozitiven in je usmerjen od notranje površine leve stene proti notranji površini desne stene tedaj, ko je $T_2^{(L)} > T_2^{(D)}$. V nasprotnem primeru je smer sevalnega toka obrnjena in ima zato negativni predznak. Iz enačbe (1.55) lahko tako razberemo, da je sevalni tok usmerjen od leve stene k desni le, če je $\frac{(T_z^{(L)} - T_N)}{2 + \frac{h}{U_1}} > \frac{(T_z^{(D)} - T_N)}{2 + \frac{h}{U_2}}$ in obratno v nasprotnem primeru.

Ker so temperaturni skoki ob notranjih površinah sten $T_2^{(i)} - T_N$, $i = L, D$ majhni v primerjavi z absolutno temperaturo zraka T_N med stenama, lahko zapišemo

$$\left(T_2^{(i)}\right)^4 = \left[T_N + \left(T_2^{(i)} - T_N\right)\right]^4 \approx T_N^4 + 4 T_N^3 \left(T_2^{(i)} - T_N\right) + \dots$$

in je gostota sevalnega toka v tem približku

$$j \approx \frac{4 \sigma T_N^3 \left(T_2^{(L)} - T_2^{(D)}\right)}{\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1} .$$

Upoštevamo še enačbo (1.55), pa dobimo

$$j \approx \frac{4 \sigma T_N^3 \left(\frac{T_z^{(L)} - T_N}{2 + \frac{h}{U_1}}\right) - 4 \sigma T_N^3 \left(\frac{T_z^{(D)} - T_N}{2 + \frac{h}{U_2}}\right)}{\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} - 1\right) + \frac{4 \sigma T_N^3}{h} \left(\frac{1 + \frac{h}{U_1}}{2 + \frac{h}{U_1}} + \frac{1 + \frac{h}{U_2}}{2 + \frac{h}{U_2}}\right)} .$$

Oglejmo si dva konkretna primera. Naj bosta steni enako debeli z debelino $L = 0,3$ m, pri čemer je leva stena iz opeke s toplotno prevodnostjo $\lambda_1 = 0,53$ W/mK, desna pa iz betona s toplotno prevodnostjo $\lambda_2 = 1,7$ W/mK. Toplotni prestopni koeficient naj bo $h = 2$ W/m²K. Toplotni prepustnosti leve in desne stene imata vrednosti

$$U_1 = \frac{\lambda_1}{L} = \frac{0,53 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}{0,3 \text{ m}} \approx 1,8 \text{ W/m}^2\text{K} ,$$

$$U_2 = \frac{\lambda_2}{L} = \frac{1,7 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}{0,3 \text{ m}} \approx 5,7 \text{ W/m}^2\text{K} ,$$

Nadalje vzemimo, da so temperature a) $T_z^{(L)} = 303$ K (30 °C), $T_z^{(D)} = 298$ K (25 °C) in $T_N = 291$ K (18 °C), b) $T_z^{(D)} = 284$ K (11 °C), preostale temperature pa enake kakor v primeru a. V obeh primerih naj bosta emisivnosti notranjih površin sten enaki $e_1 = e_2 = 0,8$.

- a) Če vstavimo podatke v izraz za gostoto sevalnega toka, dobimo $j \approx 1$ W/m². Gostota toplotnega toka brez upoštevanja sevanja je $q|_{(j=0)} \approx 14$ W/m². Prispevek sevanja h gostoti toplotnega toka je

$$\left(\frac{\frac{h}{U_2} - \frac{h}{U_1}}{\left(2 + \frac{h}{U_1}\right) \left(2 + \frac{h}{U_2}\right)} \right) \cdot j \approx -0,1 \text{ W/m}^2 ,$$

kar pomeni, da je v tem primeru vpliv sevanja notranjih površin sten na gostoto celotnega toplotnega toka zanemarljiv. Prispevek je manjši od 1 % gostote toplotnega toka $q|_{(j=0)}$. Temperaturni skoki na notranjih površinah sten brez upoštevanja sevanja so

$$(T_2^{(L)} - T_N)|_{(j=0)} \approx 3,9^\circ\text{C} ,$$

$$(T_2^{(D)} - T_N)|_{(j=0)} \approx 3,0^\circ\text{C} ,$$

Če upoštevamo sevanje, se temperaturni skok na notranji površini leve stene zmanjša,

$$T_2^{(L)} - T_N \approx 3,9^\circ\text{C} - 0,34^\circ\text{C} ,$$

na notranji površini desne stene pa se poveča na

$$T_2^{(D)} - T_N \approx 3,0^\circ\text{C} + 0,3^\circ\text{C} ,$$

Popravek v enem in drugem primeru je okrog 10 %, tako da sevanje bolj vpliva na temperaturne skoke na površini sten kakor pa na velikost toplotnega toka, ki priteka v prostor med stenama. Obenem zdaj tudi razumemo, zakaj je sevalni tok tako majhen, saj mu namreč ustreza temperaturna razlika le $T_2^{(L)} - T_2^{(D)} \approx 0,26^\circ\text{C}$.

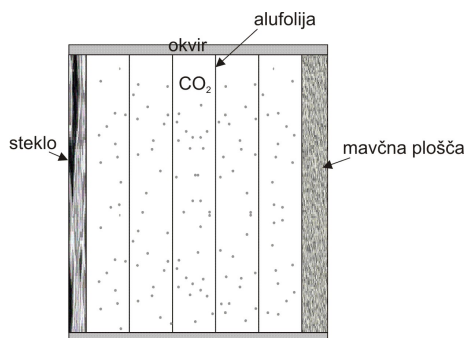
- b) Gostota sevalnega toka je v tem primeru $j \approx 7,7 \text{ W/m}^2$, medtem ko je $q|_{(j=0)} \approx 1,8 \text{ W/m}^2$. Prispevek sevanja h gostoti toplotnega toka q je v tem primeru $-0,8 \text{ W/m}^2$ ali 44 %, kar seveda ni zanemarljivo. Podobno velja za temperaturne skoke, kjer imamo $T_2^{(L)} - T_N \approx 3,9^\circ\text{C} - 2,6^\circ\text{C}$, $T_2^{(D)} - T_N \approx -3,6^\circ\text{C} + 2,2^\circ\text{C}$ ter $T_2^{(L)} - T_2^{(D)} \approx 2,7^\circ\text{C}$.

Primer 1.14: Kot naslednji primer vzemimo fasadno modularno ploščo, ki ima na zunanji strani ploščo iz kaljenega stekla debeline 8 mm, na notranji strani pa mavčno-kartonasto ploščo debeline 1,2 cm. Vmes je 5 komor, vsaka z debelino 2 cm, ki so ločene z 0,1 mm debelo aluminijasto folijo (slika 1.31). Komore so napolnjene s CO_2 pri tlaku 1 bar. Snovne lastnosti za posamezne sestavne dele so zbrane v preglednici 1.2.

Preglednica 1.2: Podatki k primeru 1.14

	ρ (kg/m ³)	λ (W/mK)	c_p (kJ/kgK)
steklo	2500	0,81	0,84
aluminij	2700	203	0,87
mavec	1400	0,76	1,09
CO_2	1,8	0,016	0,85

Določi maso plošče na enoto površine m/S , toplotno prepustnost U in čas, v katerem se v plošči vzpostavi stacionarno stanje, če je na začetku plošča v toplotnem ravnovesju z okolico pri temperaturi T_2 , nato pa se temperatura na površini stekla v hipu poviša na $T_1 > T_2$! Ali je v tem primeru treba upoštevati prenos toplote s sevanjem? Utemelji odgovor!



Slika 1.31: Fasadna modularna plošča

Rešitev: Masa plošče na enoto površine je:

$$\frac{m}{S} = \rho_{\text{steklo}} d_{\text{steklo}} + \rho_{\text{mavec}} d_{\text{mavec}} + 4 \rho_{\text{Al}} d_{\text{Al}} + 5 \rho_{\text{CO}_2} d_{\text{CO}_2} \approx 38 \text{ kg/m}^2.$$

Zaradi dodatnih robnih elementov, ki zapirajo komore, je dejanska masa na enoto površine nekoliko večja in znaša okrog $45 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$.

Toplotne prepustnosti posameznih plasti so:

$$U_{\text{steklo}} = \frac{\lambda_{\text{steklo}}}{d_{\text{steklo}}} = \frac{0,81 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{0,008 \text{ m}} \approx 101 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}},$$

$$U_{\text{Al}} = \frac{\lambda_{\text{Al}}}{4 d_{\text{Al}}} = \frac{203 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{4 \cdot 0,0001 \text{ m}} \approx 5 \cdot 10^5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}},$$

$$U_{\text{mavec}} = \frac{\lambda_{\text{mavec}}}{d_{\text{mavec}}} = \frac{0,76 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{0,012 \text{ m}} \approx 63 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}},$$

$$U_{\text{CO}_2} = \frac{\lambda_{\text{CO}_2}}{5 d_{\text{CO}_2}} = \frac{0,016 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{5 \cdot 0,02 \text{ m}} \approx 0,16 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}.$$

Toplotna prepustnost panela U je tedaj enaka

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U_{\text{steklo}}} + \frac{1}{U_{\text{Al}}} + \frac{1}{U_{\text{mavec}}} + \frac{1}{U_{\text{CO}_2}} \approx (10^{-2} + 2 \cdot 10^{-6} + 1,6 \cdot 10^{-2} + 6,25) \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{\text{W}} \approx 6,28 \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{\text{W}} \approx \frac{1}{U_{\text{CO}_2}}.$$

Toplotna prepustnost panela je torej približno enaka toplotni prepustnosti plina v komorah, to je

$$U \approx 0,16 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}.$$

Vrednost, ki jo specificira proizvajalec, je $U = 0,24 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Razlika glede na vrednost, ki smo jo izračunali, je posledica toplotnih izgub skozi robne elemente fasadnega panela.

⁵Katalog produkta Qbiss. Air, The ultimate thin facade system for maximal space and energy efficiency. Trimo d. d., Trebnje (2010).

Termične difuzivnosti posameznih vrst materiala panela so:

$$\chi_{\text{steklo}} = \frac{\lambda_{\text{steklo}}}{\rho_{\text{steklo}} c_{p \text{ steklo}}} = \frac{0,81 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,84 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} \approx 0,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

$$\chi_{\text{Al}} = \frac{\lambda_{\text{Al}}}{\rho_{\text{Al}} c_{p \text{ Al}}} = \frac{203 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,87 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} \approx 86,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

$$\chi_{\text{mavec}} = \frac{\lambda_{\text{mavec}}}{\rho_{\text{mavec}} c_{p \text{ mavec}}} = \frac{0,76 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{1400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1,09 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} \approx 0,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

$$\chi_{\text{CO}_2} = \frac{\lambda_{\text{CO}_2}}{\rho_{\text{CO}_2} c_{p \text{ CO}_2}} = \frac{0,016 \frac{\text{W}}{\text{m K}}}{1,8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,85 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}} \approx 10,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Ustrezni časovni intervali, ki so potrebni, da se v posamezni plasti doseže stacionarno stanje, so

$$t_{\text{steklo}} \approx \frac{d_{\text{steklo}}^2}{\chi_{\text{steklo}}} = \frac{(8 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{0,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \approx 160 \text{ s} \approx 3 \text{ min},$$

$$t_{\text{Al}} \approx \frac{d_{\text{Al}}^2}{\chi_{\text{Al}}} = \frac{(10^{-4} \text{ m})^2}{86,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \approx 10^{-4} \text{ s},$$

$$t_{\text{mavec}} \approx \frac{d_{\text{mavec}}^2}{\chi_{\text{mavec}}} = \frac{(1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{0,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \approx 300 \text{ s} = 5 \text{ min},$$

$$t_{\text{CO}_2} \approx \frac{(5 d_{\text{CO}_2})^2}{\chi_{\text{CO}_2}} = \frac{(5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{10,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \approx 950 \text{ s} \approx 16 \text{ min}.$$

Glede na gornje ocene lahko rečemo, da se v panelni plošči vzpostavi toplotno ravnovesje v nekaj deset minutah. Sevanje je treba upoštevati le na zunanji površini stekla in mavčne plošče, tako da primerno izberemo (redefiniramo, kakor smo to storili pri prejšnji nalogi) temperaturi T_2 in T_1 . Sevanja med komorami ni treba upoštevati, kar sledi iz enačbe za gostoto sevalnega toka med dvema ravnima vzporednima površinama s temperaturama T_a in T_b :

$$j = \frac{\sigma (T_a^4 - T_b^4)}{\frac{1}{e_a} + \frac{1}{e_b} - 1}.$$

Za kovinske površine namreč velja, da je odbojnost za elektromagnetno valovanje $r \approx 1$ in $e = a = 1 - r \approx 0$. Če je torej vsaj ena od obeh emisivnosti površin e enaka nič, iz gornjega izraza sledi $j \approx 0$.

Vzemimo, da sta temperaturi $T_2 = 25^\circ \text{C}$ in $T_1 = 35^\circ \text{C}$. Ko se vzpostavi stacionarno stanje, vsak m^2 plošče prejme toploto

$$\frac{Q}{S} \approx \rho_{\text{steklo}} d_{\text{steklo}} c_{p \text{ steklo}} (T_1 - T_2) + \rho_{\text{Al}} d_{\text{Al}} c_{p \text{ Al}} \left(\frac{T_1 - T_2}{2} \right) + \rho_{\text{CO}_2} 5 d_{\text{CO}_2} c_{p \text{ CO}_2} \left(\frac{T_1 - T_2}{2} \right),$$

in če upoštevamo temperaturno razliko $T_1 - T_2 = 10^\circ \text{C}$, sledi

$$\frac{Q}{S} \approx 168 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2} + 5 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2} + 1 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2} = 174 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2}.$$

Fasadni panel, ki smo ga obravnavali, ima majhno maso na enoto površine in majhno toplotno prepustnost. Njegovi slabosti sta majhna toplotna kapaciteta na enoto površine ($C = \frac{Q/S}{\Delta T}$)⁶ in kratek čas, v katerem se vzpostavi stacionarno stanje. Pri tako kratkem času panel skoraj trenutno oziroma z zakasnitvijo nekaj deset minut, kakor smo videli zgoraj, sledi spreminjanju zunanje temperature, ki se pri nihanju dnevnih temperatur spreminja z značilnim časom nekaj ur.

Vzemimo enak panel kakor zgoraj, le da komoro, ki meji na stekleno ploščo, napolnimo s parafinom, ki ima tališče približno pri 25 °C. Specifična talilna toplota parafina je okrog 140 kJ/kg, gostota trdne in tekoče faze je približno enaka in je 820 kg/m³. Specifična toplota trdne faze je $c_{ps} = 4 \text{ kJ/kgK}$, tekoče $c_{pl} = 1,5 \text{ kJ/kgK}$ in toplotni prevodnosti tekoče in trdne faze sta približno enaki 0,2 W/mK. Ko se v tem primeru temperatura zunanje površine stekla poviša na 35 °C, se začne plast parafina v prvi komori taliti. Stefanovo število tekoče faze je

$$Ste(l) = \frac{c_l (T_1 - T_t)}{q_t} = \frac{1,5 \text{ kJ kg}^{-1} \cdot 10 \text{ K}}{140 \text{ kJ kg}^{-1}} \approx 0,1.$$

Torej smemo vzeti, da se med taljenjem parafina v tekoči fazi vzpostavi kvazistacionarno stanje. Čas taljenja izračunamo po enačbi (1.36) (temperaturni padec v stekleni plošči zanemarimo),

$$t = \left(\frac{\rho q_t}{2 \lambda_l (T_1 - T_t)} \right) d_{\text{co}_2}^2 = \frac{820 \text{ kg m}^{-3} \cdot 140 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1}}{2 \cdot 0,2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 10 \text{ K}} \cdot (0,02 \text{ m})^2 \approx 3,2 \text{ h}.$$

Odzivni čas panela se je z vstavitvijo FSP povečal z nekaj deset minut na nekaj ur. Toplota, ki jo pri tem prejme vsak m² raztaljene plasti parafina, je

$$\frac{Q}{S} = \rho d_{\text{co}_2} q_t = 820 \text{ kg m}^{-3} \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 140 \text{ kJ kg}^{-1} \approx 2300 \text{ kJ/m}^2.$$

Ko se plast parafina v prvi komori stali, se v naslednjih približno 15 minutah vzpostavi stacionarno stanje v celotnem panelu tako, da je na zunanji površini stekla temperatura 35 °C, na zunanji površini mavčne plošče pa 25 °C. Temperaturo aluminijaste folije $T_{\text{Al}}^{(1)}$, ki loči tekoči parafin od ogljikovega dioksida v drugi komori, izračunamo po enačbi (temperaturni padec v alufoliji zanemarimo)

$$\lambda_l \frac{T_1 - T_{\text{Al}}^{(1)}}{d_{\text{co}_2}} \approx \lambda_{\text{co}_2} \frac{T_{\text{Al}}^{(1)} - T_2}{4 d_{\text{co}_2}},$$

kar nam da

$$T_1 - T_{\text{Al}}^{(1)} = \frac{T_1 - T_2}{1 + 4 \frac{\lambda_l}{\lambda_{\text{co}_2}}} = \frac{10 \text{ K}}{1 + 4 \frac{0,2}{0,016}} \approx 0,2 \text{ K}.$$

Temperaturni padec v parafinski plasti je le 0,2 K. Plast parafina se je potem, ko se je stalila, še segrela za približno 10 K, pri čemer je prejela dodatno toploto $\frac{Q}{S} \approx \rho d_{\text{co}_2} c_{pl} (T_1 - T_2) = 820 \text{ kg m}^{-3} \cdot 0,02 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ kJ kg}^{-1} \cdot 10 \text{ K} \approx 250 \text{ kJ/m}^2$.

Za sklep tega poglavja bomo navedli še nekaj zgledov, ki dodatno potrjujejo pomembnost termičnega sevanja pri prenosu toplote. Na primer, pozimi nam je lahko v sobi z vročimi radiatorji in že ogretim zrakom hladno, dokler se tudi stene ne segrejejo. Za to je krivo sevanje, ki ga naše telo oddaja stenam, te pa ga ne vračajo v zadostni meri, dokler se ne segrejejo. Podobno razumemo, zakaj je verjetnost

⁶Pri tem ne smemo pozabiti, da je množina prejete ali oddane toplote odvisna od vrste spremembe, ki ji je snov podvržena.

za nastanek slane večja, kadar so noči jasne, kakor tedaj, ko je nebo prekrito z oblaki. Ker zrak pri normalnih temperaturah praktično nič ne seva, predstavlja jasno nebo črno telo s temperaturo približno 3 K. Ob jasnih nočeh površina Zemlje oddaja v nebo precej toplote v obliki sevanja, v zameno pa je dobiva zelo malo. Če ni vetra, se zato površina Zemlje hitro ohladi tudi pod nič stopinj Celzija, čeprav je temperatura zraka lahko precej nad ničlo. Drugače je, če so noči oblačne. Voda v oblakih namreč veliko izsevane infrardeče svetlobe absorbira in jo precejšen delež izseva nazaj na Zemljo. Tako površina Zemlje v celoti izgublja manj toplote in se zato tudi manj ohladi.

Energija, ki jo segreto telo izseva v obliki elektromagnetnega valovanja, ni enakomerno porazdeljena po valovnih dolžinah. Porazdelitev izsevane energije telesa po valovnih dolžinah imenujemo *spekter sevanja*. Spekter črnega telesa poznamo (podaja ga t. i. Planckov zakon, enačba (1.56) v razdelku 1.8). Za nečrna telesa velja, da sta tako absorptivnost kot tudi emisivnost odvisni od valovne dolžine: $a = a(\lambda)$ in $e = e(\lambda)$. Enakost $a = e$, ki smo jo zapisali v zvezi s Kirchhoffovim zakonom, moramo v resnici natančneje opredeliti tako: $a(\lambda) = e(\lambda)$. Trditev, da so dobri absorberji tudi dobri sevalci, velja le za absorpcijo in emisijo pri enaki valovni dolžini in enaki temperaturi. Vpojnost ali absorptivnost nekaterih snovi je namreč močno odvisna od valovne dolžine absorbirane svetlobe. Steklo, na primer, ki je prozorno za vidno svetlobo ($400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$), močno absorbira infrardečo svetlobo ($\lambda > 1000 \text{ nm}$).

To je razlog, zakaj je temperatura v topli gredi v splošnem precej višja od zunanje temperature. Sončno sevanje v vidnem delu spektra z lahkoto prodre skozi steklo in se absorbira v zemeljski in na drugih površinah v topli gredi ter jih tako segreva. Vse površine (tudi zemeljska) seveda tudi sevajo, a ker je njihova temperatura veliko nižja od temperature Sonca, sevajo predvsem infrardečo svetlobo. Za te valovne dolžine pa je steklo praktično neprepustno in zato ostane večina prejete sončne energije v topli gredi, katere notranjost se na ta račun segreva. V topli gredi se torej absorbirajo kratke valovne dolžine, izsevano elektromagnetno valovanje pa ima predvsem dolge valovne dolžine in v povezavi z absorptivnostjo stekla dobimo skoraj enosmeren tok energije.

Za konec naredimo še kratek račun. Kakor smo že omenili, je gostota energijskega toka s Sonca na robu zemeljske atmosfere približno $j = 1360 \text{ W/m}^2$. Povprečna absorptivnost atmosfere a je okrog 0,7. Če povprečimo vpadni energijski tok čez celotno površino roba atmosfere, imamo

$$\tilde{j} \approx \frac{\pi R^2}{4\pi R^2} \cdot 0,7 \cdot 1360 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 238 \frac{\text{W}}{\text{m}^2},$$

R je približno kar enak polmeru Zemlje. Če vzamemo, da je Zemlja kot planet v toplotnem ravnovesju z okolico (v povprečju čez več let), to pomeni, da mora vsak m^2 površine Zemlje oddajati sevalni energijski tok 238 W. Če površina Zemlje seva približno kakor črno telo, mora biti ravnovesna temperatura T_e njenega površja enaka

$$\sigma T_e^4 = \frac{238 \text{ W}}{\text{m}^2} \rightarrow T_e = \left(\frac{238 \text{ W m}^{-2}}{5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}} \right)^{1/4} = 255 \text{ K}.$$

Pri teh pogojih je ravnovesna temperatura torej enaka -18°C . V računu nismo upoštevali, da se precejšen delež dolgovalovnega sevanja, ki ga zemlja oddaja, absorbira v atmosferi, in to predvsem v vodni pari in molekulah CO_2 . Atmosfera absorbirano energijo nato ponovno izseva v obliki dolgovalovne infrardeče svetlobe. Delež, ki ga atmosfera izseva proti Zemlji, se na njeni površini absorbira in jo tako

segreva. Zato je dejanska povprečna vrednost temperature zemeljske površine večja in je približno enaka $T_p \approx 288 \text{ K}$ ali 15°C . Učinek tople grede v tem primeru torej povzroči dvig ravnovesne temperature za približno 33°C . Toda pri temperaturi 288 K Zemlja seva precej bolj kakor pri temperaturi 255 K . Če ponovno vzamemo, da seva kot črno telo, je gostota izsevanega energijskega toka pri 288 K enaka 390 W/m^2 . To pomeni, da ob toplotnem ravnovesju atmosfera Zemlji vrne $390 \text{ W/m}^2 - 238 \text{ W/m}^2 = 152 \text{ W/m}^2$. Če Zemlja dobi manj od te vrednosti, se začne ohlajati, če dobi več, pa se začne segrevati. Katera od teh dveh možnosti prevlada, pa je odvisno predvsem od množine vodne pare in CO_2 v atmosferi.

1.8 Spekter sevanja črnega telesa in osnove fotometrije

Zdaj se bomo vprašali, kako je energija, ki jo črno telo izseva v obliki elektromagnetnega valovanja, porazdeljena po valovnih dolžinah. Elektromagnetno valovanje, ki ga zaznava človeško oko, ima valovne dolžine na intervalu od približno 400 nm do približno 780 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). Tako elektromagnetno valovanje na kratko imenujemo *vidna svetloba*. Elektromagnetno valovanje z valovnimi dolžinami od 780 nm do približno 1 mm imenujemo *infrardeča svetloba*, elektromagnetno valovanje z valovnimi dolžinami od 10 nm do 400 nm pa je tako imenovana *ultravijolična svetloba*. Zunaj naštetih območij imamo na dolgovalovni strani *mikrovalove* in *radijske valove*, na kratkovalovni strani pa *rentgenske žarke* in *žarke gama*. Nas zanimajo predvsem deleži izsevane vidne, ultravijolične in infrardeče svetlobe.

Naj bo $dj_{(\text{č.t.})}^*$ delež izsevanega energijskega toka na enoto površine črnega telesa, ki odpade na interval valovnih dolžin med λ in $\lambda + d\lambda$. To lahko zapišemo še takole

$$dj_{(\text{č.t.})}^* = \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} d\lambda .$$

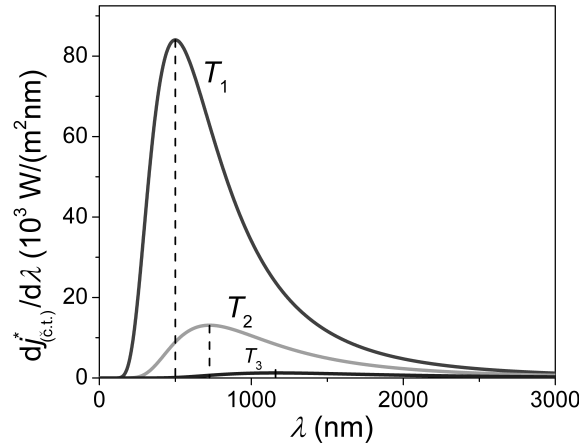
Kvocijent $\frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda}$ predstavlja *spekter sevanja črnega telesa* in ga grafično prikažemo tako, da na ordinatno os nanašamo vrednosti $\frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda}$, na abscisno pa ustrezne vrednosti valovne dolžine. Površina, ki jo tak graf oklepa z abscisno osjo, je enaka površinski gostoti izsevanega energijskega toka, to je $j_{(\text{č.t.})}^* = \sigma T^4$. Prvi, ki je matematično opisal spekter sevanja črnega telesa, je bil Max Planck (1900), in tako imenovani Planckov zakon se glasi

$$\frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} , \quad (1.56)$$

kjer je $c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ hitrost svetlobe v vakuumu, $k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ je Boltzmannova konstanta in $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ Planckova konstanta. Spekter sevanja črnega telesa za različne temperature telesa je prikazan na sliki 1.32.

Kakor smo že omenili, je vsota vseh prispevkov posameznih valovnih dolžin enaka energiji, ki jo enota površine črnega telesa izseva v časovni enoti. To je

$$j_{(\text{č.t.})}^* \equiv \sigma T^4 = 2\pi h c^2 \int_0^\infty \frac{\lambda^{-5} d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} = \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} .$$



Slika 1.32: Spekter sevanja črnega telesa za temperature $T_1 = 5800$ K, $T_2 = 4000$ K in $T_3 = 2500$ K

Integral izračunamo tako, da imenoalec pod integralom razvijemo v vrsto. Dobimo

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty x^3 (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{6}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Tako imamo

$$j_{(\text{č.t.})}^* = \sigma T^4 = \left(\frac{2 \pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \right) \cdot T^4$$

in nato

$$\sigma = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}.$$

Delež izsevanega energijskega toka na intervalu valovnih dolžin $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ izračunamo po enačbi

$$\eta(\Delta\lambda, T) \equiv \frac{j_{(\text{č.t.})}^*(\Delta\lambda, T)}{\sigma T^4} = \frac{15}{\pi^4} \int_{hc/\lambda_1 kT}^{hc/\lambda_2 kT} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Integral izračunamo numerično. Tako dobimo za Sonce, ki ima temperaturo površja $T = 5760$ K, deleže izsevane ultravijolične, vidne in rdeče svetlobe, $\eta(\text{UV}, 5760\text{K}) \approx 10\%$, $\eta(\text{VS}, 5760\text{K}) \approx 46\%$ in $\eta(\text{IR}, 5760\text{K}) \approx 44\%$. Enako izračunamo ustrezne deleže tudi za navadno žarnico, ki ima temperaturo nitke okrog 2500 K. V tem primeru dobimo $\eta(\text{UV}, 2500\text{K}) \approx 0,02\%$, $\eta(\text{VS}, 2500\text{K}) \approx 6\%$ in $\eta(\text{IR}, 2500\text{K}) \approx 94\%$.

Primer 1.15: S pomočjo Planckovega zakona določi valovno dolžino $\lambda_{\max}$, pri kateri črno telo s temperaturo T najmočnejše seva!

Rešitev: Spekter sevanja črnega telesa ima pri valovni dolžini $\lambda_{\max}$ maksimum z vodoravno tangento. To pomeni, da velja:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} \right) \right|_{\lambda_{\max}} = \frac{2 \pi h c^2}{\lambda^6} \left[\frac{-5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} + \frac{hc}{\lambda kT} \frac{e^{hc/\lambda kT}}{(e^{hc/\lambda kT} - 1)^2} \right] = 0.$$

Če označimo $hc/\lambda kT = x$, lahko gornjo enačbo prepišemo kot

$$5 = \frac{x}{1 - e^{-x}} = x(1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots).$$

Rešitev zapišemo v obliki $x = 5 - \epsilon$, pri čemer pričakujemo $\epsilon \ll 1$. Nastavek nesemo v prejšnjo enačbo, ki nam da,

$$5 \approx (5 - \epsilon)(1 + e^{-5} + \dots),$$

in $\epsilon \approx 0,034$. Tako imamo $x \approx 4,965$. Če upoštevamo $x = hc/\lambda kT$, sledi

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4,965 k} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}{4,965 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m K}.$$

Enačba

$$\lambda_{max} T \equiv \text{const} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$$

se imenuje *Wienov zakon*. Za Sonce, katerega površina ima temperaturo $T = 5760 \text{ K}$, sledi, da najmočneje seva pri valovni dolžini $\lambda_{max} = 500 \text{ nm}$, ki jo človeško oko zaznava kot modrozeleno svetlobo. Telo pri sobni temperaturi ($T \approx 300 \text{ K}$) pa seva najmočneje pri $\lambda_{max} \approx 10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$, ki je daleč v infrardečem delu spektra.

Ker izsevana energija ni enakomerno porazdeljena po valovnih dolžinah, moramo natančneje opredeliti Kirchhoffov zakon. Vzemimo votlino, katere stene imajo stalno temperaturo. Zaradi sevanja se v votlini slej ko prej vzpostavi ravnovesna porazdelitev elektromagnetnega valovanja, ki ima spektralni sestav, značilen za črno telo. To pomeni, da velja

$$a(\lambda) \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} d\lambda = \frac{dj^*}{d\lambda} d\lambda$$

ali

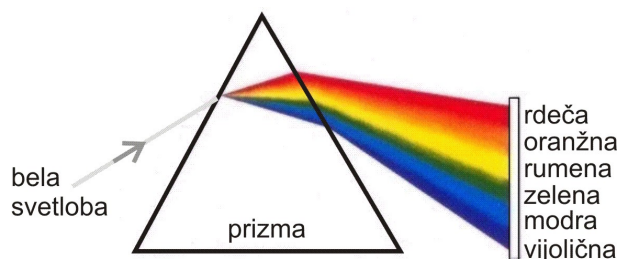
$$\frac{1}{a(\lambda)} \frac{dj^*}{d\lambda} = \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda}. \quad (1.57)$$

Enačba (1.57) je posplošeni Kirchhoffov zakon, v katerem je $a(\lambda)$ absorptivnost telesa pri dani valovni dolžini. *Razmerje med gostoto izsevanega energijskega toka na intervalu med λ in $\lambda + d\lambda$ in absorptivnostjo telesa na istem intervalu valovnih dolžin je enako za vsa telesa.* Če zapišemo $\frac{dj^*}{d\lambda} = e(\lambda) \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda}$, sledi iz enačbe (1.57)

$$a(\lambda) = e(\lambda).$$

Kakor smo že omenili, človeško oko zaznava le elektromagnetno valovanje z valovnimi dolžinami na intervalu od 400 nm do približno 780 nm. Različne valovne dolžine zaznava oko kot različne barve. Mešanico različnih barv v razmerjih, kakor jih vsebuje sončna svetloba, zaznavamo kot belo svetlobo. Posamezne barve razločimo, če belo svetlobo razkrojimo, na primer tako, da jo spustimo skozi stekleno prizmo (slika 1.33), vendar oko ni enako občutljivo za različne barve. Izsevani energijski tok črnega telesa s temperaturo T in površino S , ki predstavlja vidno svetlobo in ga bomo na kratko imenovali *svetlobni tok*, je

$$P_S(T) = S \int_{380 \text{ nm}}^{780 \text{ nm}} \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} d\lambda \equiv S \eta(VS, T) \sigma T^4$$



Slika 1.33: Belo svetlobo razkrojimo tako, da jo spustimo skozi optično (stekleno) prizmo

ter ga izražamo v $[P_S] = \text{W}$. V svetlobni tehniki pa je koristnejši tako imenovani *občuteni svetlobni tok* $P_S^{(o)}$, ki ga definiramo tako, da upoštevamo relativno barvno občutljivost $RBO(\lambda)$ očesa, katere odvisnost od valovne dolžine je zapisana v preglednici 1.3 v numerični obliki in prikazana na sliki 1.34⁷.

Preglednica 1.3: $RBO(\lambda)$ v odvisnosti od valovne dolžine

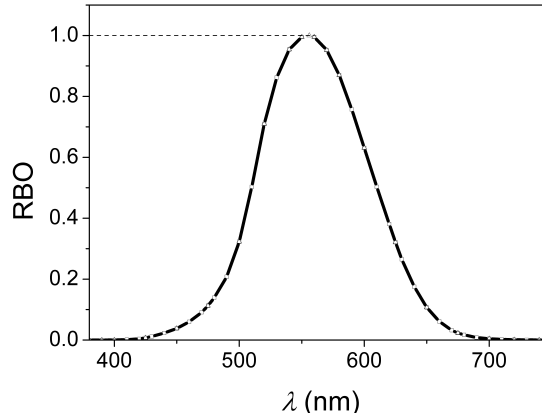
λ (nm)	$RBO(\lambda)$	λ (nm)	$RBO(\lambda)$	λ (nm)	$RBO(\lambda)$
380	0,00000	510	0,50300	640	0,17500
390	0,00010	520	0,71000	650	0,10700
400	0,00040	530	0,86200	660	0,06100
410	0,00120	540	0,95400	670	0,03200
420	0,00400	550	0,99500	675	0,02320
425	0,00730	556	1,00000	680	0,01700
430	0,01160	560	0,99500	690	0,00820
440	0,02300	570	0,95200	700	0,00410
450	0,03800	580	0,87000	710	0,00210
460	0,06000	590	0,75700	720	0,00102
470	0,09100	600	0,63100	730	0,00052
475	0,11260	610	0,50300	740	0,00027
480	0,13900	620	0,38100	750	0,00012
490	0,20800	625	0,32100	760	0,00008
500	0,32300	630	0,26500	780	0,00000

Občuteni svetlobni tok $P_S^{(o)}$ je definiran kot

$$P_S^{(o)} = S \cdot 685 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \int_{380 \text{ nm}}^{780 \text{ nm}} RBO(\lambda) \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} d\lambda = S \cdot 685 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \int_0^\infty RBO(\lambda) \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} d\lambda, \quad (1.58)$$

pri čemer smo za občuteni svetlobni tok $P_S^{(o)}$ vpeljali novo enoto $\text{lm} \equiv \text{lumen}$ tako, da že enota sama

⁷M.Born, E.Wolf, *Principles of Optics*, seventh edition, Cambridge University Press (1999). R. Kladnik, Visokošolska fizika 3. del, DZS (1989).



Slika 1.34: Relativna barvna občutljivost očesa kakor je napisano v preglednici 1.3.

pove, da imamo opravka z občutenim svetlobnim tokom. Iz preglednice 1.3 še razberemo, da je 1 W rumenozelene svetlobe z valovno dolžino 556 nm za oko vreden 685 lm, 1 W rdeče svetlobe z valovno dolžino 610 nm pa le $1 \text{ W} \cdot RBO(610 \text{ nm}) \cdot 685 \text{ lm/W} = 1 \text{ W} \cdot 0,503 \cdot 685 \text{ lm/W} = 344,5 \text{ lm}$. Za črno telo s temperaturo Sonca velja

$$\int_0^\infty RBO(\lambda) \frac{dj_{(\text{c.t.})}^*(5760 \text{ K})}{d\lambda} d\lambda = 849,4 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$$

in

$$\frac{P_S^{(o)}(5760 \text{ K})}{S} = 5,82 \cdot 10^5 \frac{\text{lm}}{\text{cm}^2}. \quad (1.59)$$

Če upoštevamo, da vsak cm^2 površine Sonca izseva v celoti $\sigma \cdot (5760 \text{ K})^4 = 6,24 \cdot 10^3 \text{ W/cm}^2$, sledi

$$\frac{\frac{P_S^{(o)}(5760 \text{ K})}{S}}{\sigma (5760 \text{ K})^4} = \frac{5,82 \cdot 10^5 \text{ lm cm}^{-2}}{6,24 \cdot 10^3 \text{ W cm}^{-2}} \approx 93 \frac{\text{lm}}{\text{W}}.$$

Kvocien

$$\tilde{\eta}(T) = \frac{\frac{P_S^{(o)}(T)}{S}}{\sigma T^4}$$

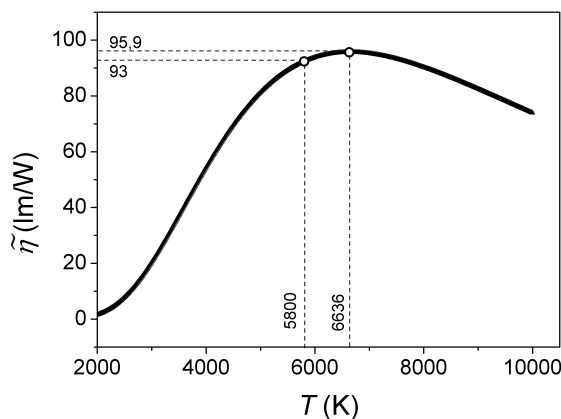
običajno imenujemo *svetlobni izkoristek* in je prikazan grafično za črna telesa različnih temperatur na sliki 1.35.

V nadaljevanju bomo opredelili osnovne fotometrične količine, ki jih uporabljamo v svetlobni tehniki.

i) Svetilnost svetila (I)

Svetilnost svetila (I) je definirana kot delež občutene svetlobnega toka $dP_s^{(o)}$, ki ga svetilo odda v majhen prostorski kot $d\Omega$. Tako imamo:

$$I = \frac{dP_s^{(o)}}{d\Omega}.$$



Slika 1.35: Svetlobni izkoristek črnega telesa v odvisnosti od temperature

Enota za to količino je $[I] = \text{lumen/steradian} \equiv 1 \text{ sveča} \equiv 1 \text{ cd (candle)}$. 1 steradian je prostorski kot, ki ga s središčem krogle oklepa poljubni del krogelne površine s površino r^2 , kjer je r polmer krogle. V splošnem velja, da je svetilnost svetila v različnih smereh različna. Za točkasta svetila pa je svetilnost očitno neodvisna od smeri in je enaka

$$I = \frac{P_S^{(o)}}{4\pi} .$$

Primer 1.16: V navadni žarnici z močjo 40 W je nitka s temperaturo $T \approx 2500 \text{ K}$, ki seva približno kakor črno telo. Kolikšna je svetilnost žarnice?

Rešitev: Ker je v žarnici nizek tlak, se praktično vsa električna energija spremeni v elektromagnetno valovanje, tako da velja

$$40 \text{ W} \approx S \cdot \int_0^\infty \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} d\lambda = S \sigma T^4 ,$$

kjer je S površina nitke. Od celotnega izsevanega energijskega toka odpade na vidno svetlobo približno 6 %, to je

$$P_S = 0,06 \cdot 40 \text{ W} = 2,4 \text{ W} = S \cdot \int_{380 \text{ nm}}^{780 \text{ nm}} \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} d\lambda$$

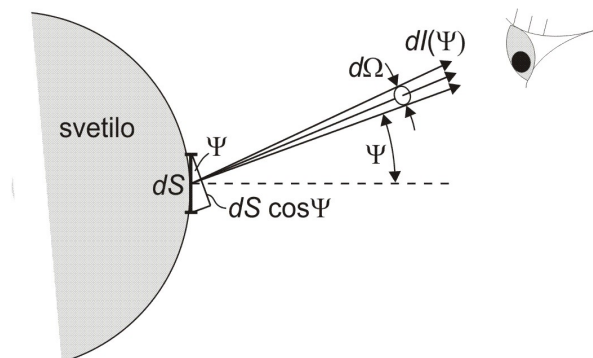
in

$$P_S^{(o)} = S \cdot 685 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \int_0^\infty RBO(\lambda) \frac{dj_{(\text{č.t.})}^*}{d\lambda} d\lambda = 685 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \cdot 0,6 \text{ W} = 411 \text{ lm} .$$

Svetlobni izkoristek pri tej temperaturi je $\tilde{\eta}(2500 \text{ K}) = 411 \text{ lm}/40 \text{ W} \approx 10 \text{ lm/W}$. Svetilnost take žarnice, če jo obravnavamo kakor točkasto svetilo, je torej enaka

$$I = \frac{P_S^{(o)}}{4\pi} = \frac{411 \text{ lm}}{4\pi} = 32,8 \text{ cd} .$$

ii) Svetlost ali bleščavost svetila (B)



Slika 1.36: Svetlost ali bleščavost površine svetila B je definirana kot svetilnost na enoto projicirane površine svetila

Preglednica 1.4: Svetlost nekaterih svetil ali površin, ki svetijo po Lambertovemu zakonu

Izvor	Svetlost B (cd/m ²)
površina Sonca	$2 \cdot 10^9$
volframska nitka v žarnici (2700 K)	10^7
bel papir na sončni svetlobi	$2,5 \cdot 10^4$
fluorescenčna svetilka	6000
plamen sveče	5000
jasno nebo	3200
površina Lune	2900
bel papir v soju Lune	0,03

Pri razsežnih svetilih, to je svetilih, ki jih ne moremo obravnavati kot točkasta, definiramo svetilnost za vsak površinski element svetila posebej (slika 1.36). Svetilnost površinskega elementa dS v smeri, ki oklepa kot Ψ glede na pravokotnico na dS , je

$$dI(\Psi) = \frac{d(dP_S^{(o)})}{d\Omega},$$

kjer je $dP_S^{(o)}$ občuteni svetlobni tok, ki ga v polprostor oddaja površinski element dS . Svetlost obravnavanega površinskega elementa, ki ga opazujemo iz smeri $d\Omega$, je definirana kot

$$B(\Psi) = \frac{dI(\Psi)}{dS \cos \Psi}, \quad (1.61)$$

kjer je $dS \cos \Psi$ navidezna velikost površinskega elementa dS glede na smer opazovanja. Enota za svetlost sledi iz definicije in je $[B] = \text{cd/m}^2$. Pri razsežnih svetilih je svetilnost izbranega površinskega

elementa praviloma odvisna od kota Ψ . Za nekatera svetila velja

$$dI(\Psi) = dI(\Psi = 0) \cos \Psi , \quad (1.62)$$

kjer je $dI(\Psi = 0)$ svetilnost izbranega površinskega elementa v smeri normale. Če svetila sevajo tako, kakor zahteva enačba (1.62), pravimo, da sevajo po *Lambertovem zakonu*. Površinski element, ki seva ali odbija svetlobo na ta način, je popolnoma *difuzen* in njegova svetlost je neodvisna od smeri opazovanja, kakor to sledi iz enačb (1.61) in (1.62),

$$B(\Psi) = \frac{dI(\Psi = 0) \cos \Psi}{dS \cos \Psi} = \frac{dI(\Psi = 0)}{dS} = \text{const} .$$

Primer 1.17: Kolikšen občuteni svetlobni tok oddaja svetilo s površino S , katerega svetlost je enaka $B = \text{const}$?

Rešitev: Delež občutenega svetlobnega toka $d(dP_s^{(o)})$, ki ga seva površinski element svetila dS v prostorski kot $d\Omega$, je enak

$$d(dP_s^{(o)}) = dI(\Psi) d\Omega = dS B \cos \Psi d\Omega .$$

Prostorski kot izberemo tako, kakor kaže slika 1.37, to je $d\Omega = 2\pi \sin \Psi d\Psi$. Tedaj imamo

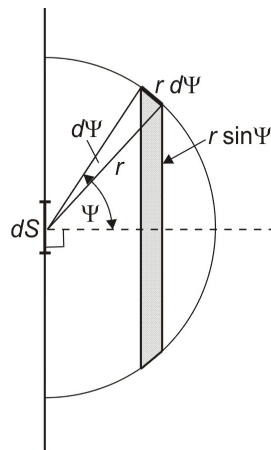
$$d(dP_s^{(o)}) = dS 2\pi B \sin \Psi \cos \Psi d\Psi$$

in

$$dP_s^{(o)} = dS B 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \Psi \cos \Psi d\Psi = dS B \pi .$$

Celotni občuteni svetlobni tok, ki ga oddaja svetilo, je torej enak

$$P_s^{(o)} = \pi S B . \quad (1.63)$$



Slika 1.37: Svetlobni tok $dP_s^{(o)}$, ki ga oddaja površinski element svetila dS v polprostor

Primer 1.18: Predpostavi, da seva Sonce po Lambertovem zakonu in oceni njegovo svetlost tako, da uporabiš rezultat (1.63)!

Rešitev: Iz (1.63) sledi

$$B = \frac{P_s^{(O)}}{\pi S} = \frac{1}{\pi} 685 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \int_0^\infty RBO(\lambda) \frac{dj_{(\tilde{c}.t.)}^*}{d\lambda} d\lambda.$$

Vrednost integrala na desni strani ocenimo takole:

$$\int_0^\infty RBO(\lambda) \frac{dj_{(\tilde{c}.t.)}^*}{d\lambda} d\lambda \approx \left. \frac{dj_{(\tilde{c}.t.)}^*}{d\lambda} \right|_{\lambda_{max}} \int_0^\infty RBO(\lambda) d\lambda \approx \left. \frac{dj_{(\tilde{c}.t.)}^*}{d\lambda} \right|_{\lambda_{max}} \cdot \frac{1}{2} (700 \text{ nm} - 400 \text{ nm}),$$

kjer smo $RBO(\lambda)$ na sliki 1.34 aproksimirali z enakostraničnim trikotnikom z višino 1 in osnovnico $(700 \text{ nm} - 400 \text{ nm})$. Nadalje velja

$$\left. \frac{dj_{(\tilde{c}.t.)}^*}{d\lambda} \right|_{\lambda_{max}} \cdot (700 \text{ nm} - 400 \text{ nm}) \approx \eta(\text{VS}, 5760 \text{ K}) \cdot \sigma T^4 = 0,46 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (5760 \text{ K})^4 \approx 3 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Tako imamo

$$B \approx \frac{1}{\pi} \cdot 685 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^7 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2} \approx 3 \cdot 10^9 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

Za natančno oceno bi lahko uporabili rezultat (1.59), ki nam da

$$B = \frac{5,82 \cdot 10^9}{\pi} \frac{\text{cd}}{\text{m}^2} = 1,85 \cdot 10^9 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

Primer 1.19: S pomočjo grafa za svetlobni izkoristek črnega telesa, ki je prikazan na sliki 1.35, oceni svetlost površine platine pri temperaturi tališča $T = 2042 \text{ K}$!

Rešitev: Iz enačbe (1.63) dobimo

$$B = \frac{P_s^{(O)}/S}{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{P_s^{(O)}}{\sigma T^4} \cdot \sigma T^4 = \frac{1}{\pi} \tilde{\eta}(T) \sigma T^4.$$

S pomočjo grafa na sliki 1.35 razberemo $\eta(2042 \text{ K}) \approx 2 \text{ lm/W}$, kar nam da

$$B(2042 \text{ K}) \approx \frac{1}{\pi} \cdot 2 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} (2042 \text{ K})^4 \approx 60 \cdot 10^4 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}.$$

Pravzaprav je bil faktor 685 lm/W v enačbi (1.58) izbran tako, da je svetlost površine platine pri temperaturi tališča natančno enaka $60 \cdot 10^4 \text{ cd/m}^2$.

iii) Osvetljenost površine E

Vzemimo, da pada svetlobni tok $P_s^{(O)}$ na ravno površino tako, da oklepa smer toka s pravokotnico na površino kot θ (slika 1.38). Površinski element dS naj prejema svetlobni tok $dP_s^{(O)}$. Osvetljenost (E) površinskega elementa dS je tedaj enaka:

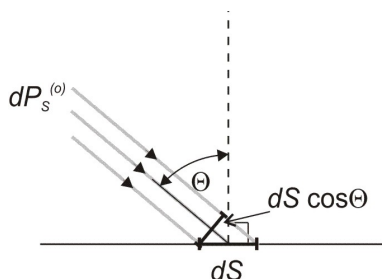
$$E = \frac{dP_s^{(O)}}{dS}$$

in jo običajno izražamo v $\text{lm}/\text{m}^2 = \text{lukx} \equiv \text{lx}$. Ker je gostota svetlobnega toka, ki pada na površino, enaka

$$j = \frac{dP_S^{(o)}}{dS \cos \theta} ,$$

lahko osvetljenost površine zapišemo tudi tako:

$$E = j \cos \theta .$$



Slika 1.38: Osvetljenost površine dS je definirana kot kvocient svetlobnega toka $dP_S^{(o)}$, ki ga površina prestreza, in velikosti površine dS

V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali osvetljenost površin, ki jo dajejo a) točkasta svetila in b) razsežna svetila.

a) *Točkasta svetila*

Gostota svetlobnega toka na oddaljenosti r od točkastega svetila je enaka

$$j = \frac{P_S^{(o)}}{4 \pi r^2} = \frac{I}{r^2} ,$$

tako da je osvetljenost v tem primeru

$$E = j \cos \theta = \frac{I}{r^2} \cos \theta , \quad (1.64)$$

kjer je θ kot, ki ga smer gostote svetlobnega toka oklepa z normalo na površinski element (slika 1.39).

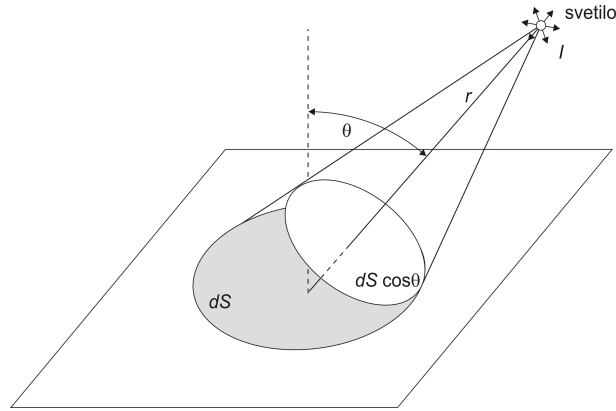
Primer 1.20: Na robu cestišča je na vrhu navpičnega droga pritrjena svetilka s svetilnostjo I . Kolikšna mora biti višina droga h , da bo osvetljenost cestišča na nasprotnem robu največja? Širina cestišča je a in svetilko lahko obravnavamo kot točkasto svetilo.

Rešitev: Za točkasto svetilo velja enačba (1.64). Iz slike 1.40 razberemo, da velja

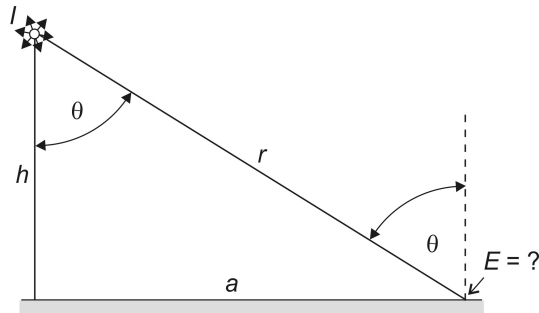
$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \theta}{a} ,$$

in

$$E = \frac{I}{a^2} \sin^2 \theta \cos \theta .$$



Slika 1.39: Osvetljenost površinskega elementa dS , ki ga daje točkasto svetilo s svetilnostjo I na oddaljenosti r .



Slika 1.40: Osvetljenost roba cestišča, ki ga daje „točkasto” svetilo s svetilnostjo I , pritrjeno na vrhu droga z višino h

Ko pri dani širini cestišča a spreminjamo višino droga h , se s tem spreminja tudi kot θ . Iščemo torej tisti kot θ , pri katerem bo osvetljenost E na nasprotnem robu največja. Tako imamo

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{I}{a^2} (2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta) = \frac{I}{a^2} \sin \theta \cos^2 \theta (2 - \tan^2 \theta) = 0 .$$

Sledi $\tan \theta = \sqrt{2}$ in

$$h = r \cos \theta = \frac{a}{\tan \theta} = \frac{a}{\sqrt{2}} .$$

Lahko pa računamo tako, da (1.64) zapišemo v obliki (slika 1.40),

$$E = \frac{I}{h^2 + a^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} ,$$

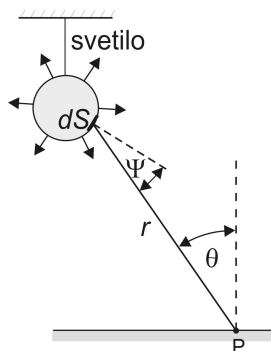
kjer smo upoštevali $\cos \theta = \frac{h}{r}$ in $r = \sqrt{h^2 + a^2}$. Za višino h , pri kateri je osvetljenost nasprotnega roba cestišča največja, velja

$$\frac{dE}{dh} = I \left[\frac{1}{(h^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{h \cdot 2h}{(h^2 + a^2)^{5/2}} \right] = \frac{I}{(h^2 + a^2)^{5/2}} [(h^2 + a^2) - 3h^2] = 0 .$$

Tako dobimo $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$, kar je seveda enak rezultat, kakor smo ga dobili pri prejšnjem načinu reševanja naloge. Pri tako izbrani višini droga je osvetljenost na nasprotnem robu cestišča enaka,

$$E = \frac{I}{\frac{a^2}{2} + a^2} \cdot \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{I}{a^2} \approx 0,4 \frac{I}{a^2}.$$

b) Razsežna svetila



Slika 1.41: Osvetljenost v izbrani točki P , ki izvira s površinskega elementa dS svetila

Pri razsežnih svetilih (slika 1.41) uporabimo enačbo (1.64) posebej za vsak površinski element dS svetila. Tako imamo,

$$dE = \frac{dI(\Psi)}{r^2} \cos \theta,$$

kjer sta definiciji kotov Ψ in θ razvidni s slike 1.41. Nadalje uporabimo enačbo (1.61) in zapišemo $dI(\Psi) = B(\Psi) dS \cos \Psi$. Sledi

$$dE = \frac{B(\Psi) \cos \Psi \cos \theta}{r^2} dS$$

in

$$E = \int \frac{B(\Psi) \cos \Psi \cos \theta}{r^2} dS, \quad (1.65)$$

kjer integriramo le po tistem delu površine svetila, ki prispeva k osvetljenosti v izbrani točki (slika 1.41).

Primer 1.21: Svetilo v obliki krogle s polmerom R je obešeno na stropu tako, da je središče svetila na višini h nad vodoravnimi tlemi. Kolikšna je osvetljenost tal na oddaljenosti r od središča svetila, če je svetlost površine svetila $B = \text{const}$?

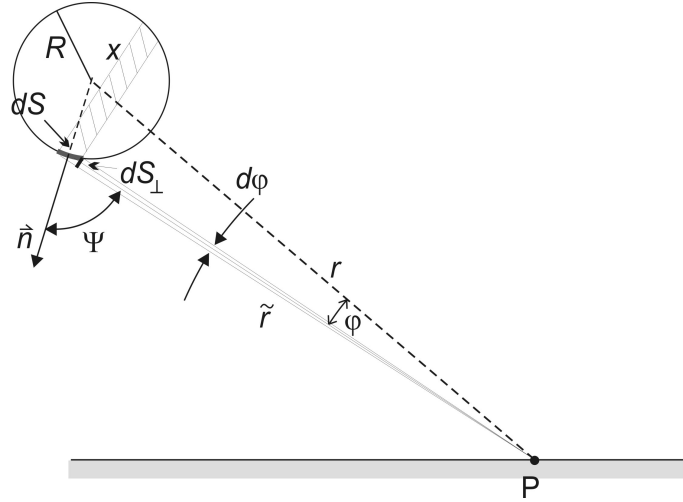
Rešitev: V tem primeru za rešitev naloge ni treba uporabiti enačbe (1.65), ampak si pomagamo s simetrijo svetila. Ker sveti svetilo v vseh smereh enakomerno, je smer gostote svetlobnega toka, ki ga svetilo oddaja, povsod v radialni smeri glede na sredino svetila. Tako imamo:

$$j = \frac{P_S^{(o)}}{4\pi r^2} = \frac{\pi B 4\pi R^2}{4\pi r^2} = \pi B \frac{R^2}{r^2},$$

Iz slike (1.44) razberemo, da je $dS \cos \Psi = dS_{\perp}$ projekcija površinskega elementa dS krogle na ravnino, ki je pravokotna na $\tilde{r}$. Po drugi strani pa velja (glej sliko 1.44)

$$dS_{\perp} = 2\pi x \tilde{r} d\varphi = 2\pi \tilde{r}^2 \sin \varphi d\varphi \equiv \tilde{r}^2 d\Omega$$

in $d\Omega = 2\pi \sin \varphi d\varphi$.



Slika 1.44: K računanju osvetljenosti $E_{\perp}$. Površina $dS_{\perp} = dS \cos \Psi$ je projekcija elementa površine krogle dS na ravnino, ki je pravokotna na $\tilde{r}$. Po drugi strani pa je $dS_{\perp} = 2\pi x \tilde{r} d\varphi = 2\pi \tilde{r}^2 \sin \varphi d\varphi$,

Tako imamo

$$E_{\perp} = B \int \frac{\cos \varphi}{\tilde{r}^2} dS_{\perp} = 2\pi B \int_0^{\varphi_{max}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \pi B \sin^2 \varphi_{max},$$

pri čemer je $\sin \varphi_{max} = \frac{R}{r}$. Torej

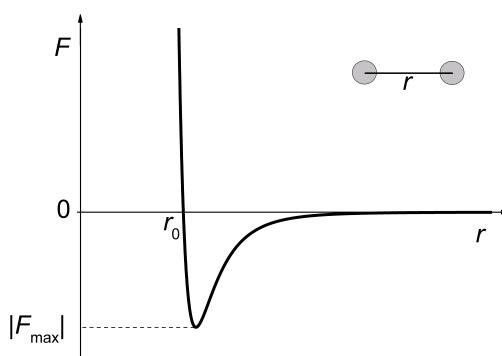
$$E = E_{\perp} \cos \theta = \pi B \frac{R^2}{r^2} \cos \theta = \pi B \frac{R^2 h}{r^3},$$

kar je enak rezultat, kakor smo ga dobili s prvotnim enostavnejšim računom. Če dobljeni rezultat primerjamo z izrazom za osvetljenost, ki jo dajejo točkasta svetila, ugotovimo, da se krogla s konstantno svetlostjo obnaša kakor točkasto svetilo s svetilnostjo $I = \frac{B \cdot 4\pi R^2}{4} = \frac{BS}{4}$.

2 Fazni diagram vode, vlaga v zraku in difuzija vodne pare

2.1 Fazni diagram vode

Vse snovi so lahko v treh *agregatnih stanjih* ali *fazah*. V kateri fazi je snov pri dani temperaturi in tlaku, je odvisno predvsem od sil med atomi ali molekulami snovi. Kakor je razvidno iz grafa na sliki 2.1, so sile med gradniki snovi (atomi ali molekulami) privlačne, kadar so razmaknjeni, in odbojne, ko jih stiskamo.



Slika 2.1: Sila med atomoma v odvisnosti od njune medsebojne razdalje. Sila je odbojna, če je $F > 0$, in privlačna, ko je $F < 0$. Razdalja r_0 je reda velikosti nekaj desetih nanometra, kar je tudi velikostni red premerov atomov. Maksimalna privlačna sila je v območju $10^{-11} \text{ N} \leq |F_{\max}| \leq 10^{-10} \text{ N}$ in jo izmerimo z mikroskopom na atomsko silo.

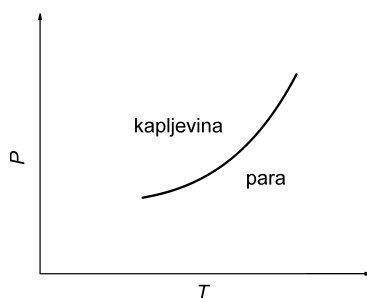
Termodinamske procese, pri katerih snov preide iz enega agregatnega stanja v drugo, na primer izparevanje kapljevine ali taljenje trdne snovi, imenujemo *fazne spremembe*. Za fazne spremembe je značilno, da so nezvezne. Na primer, ko led, ki je ohlajen pod temperaturo 0°C , segrevamo, se njegovo termodinamsko stanje postopoma spreminja, dokler temperatura ne doseže vrednosti 0°C . Pri tej temperaturi in tlaku 1 bar pa se led ob nadaljnjem dovajanju toplote, začne spreminjati v vodo, ki ima

popolnoma drugačne fizikalne lastnosti. Led, voda v tekočem stanju in para so faze, v katerih je lahko voda.

Kadar govorimo o trdnem agregatnem stanju kot o fazi, ki je različna od tekoče faze, je treba poudariti, da to strogo velja le za snovi, ki tvorijo *kristale*. Drugače je pri *amorfnih snoveh*, ki se ob segrevanju postopoma mehčajo, dokler ne postanejo tekoče. Amorfnia snov v trdnem stanju zato ni samostojna faza. Steklo, na primer, v trdnem in tekočem stanju nista različni fazi.

Prehod iz trdne faze v kapljevinsko se pri danem tlaku vedno zgodi ob natančno določeni temperaturi, ki jo imenujemo *temperatura tališča* snovi. Tako se led pri tlaku 1 bar začne taliti natančno pri 0°C . Ob nadaljnjem dovajanju toplote ostane temperatura nespremenjena, dokler se ves led ne spremeni. Med taljenjem imamo torej v posodi hkrati led in vodo, ki imata temperaturo 0°C . Pravimo, da sta led in voda pri 0°C in tlaku 1 bar v toplotnem ravnovesju. S tem smo samo na drug način opredelili temperaturo, pri kateri se zgodi fazna sprememba: to je temperatura, pri kateri je lahko snov pri danem tlaku hkrati v dveh fazah, ki sta med seboj v toplotnem ravnovesju. Pri temperaturah, ki so višje ali nižje, pa je lahko snov pri enakem tlaku le v eni fazi. Pri normalnem tlaku 1 bar in temperaturi, ki je nižja od 0°C , voda obstaja le kot led, nad 0°C (a pod 100°C) pa le v tekočem stanju.

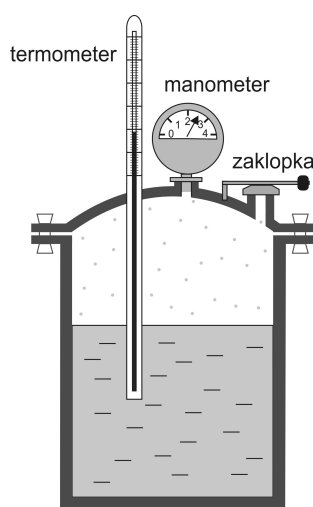
Temperatura, pri kateri pride do fazne spremembe, je odvisna od tlaka. To odvisnost najlažje prikažemo grafično na diagramu, na katerem na ordinatno os nanašamo tlak, na abscisno pa temperaturo. Tak graf imenujemo *fazni diagram*. Vsaka točka na diagramu predstavlja vodo v nekem stanju. Točke, v katerih sta dve fazi v toplotnem ravnovesju, ali z drugimi besedami, točke, na katerih pride do fazne spremembe, ležijo na neki krivulji. To pomeni, da obstaja med tlakom in temperaturo, ki določata lego teh točk, neka matematična zveza. Graf na sliki 2.2 prikazuje fazno spremembo iz kapljevinskega v plinasto stanje. Krivulja, ki predstavlja fazno spremembo in se v tem primeru imenuje *vrelna krivulja*, določa temperaturo vrelišča kapljevine v odvisnosti od tlaka, $T = T(P)$. Točke na tej krivulji predstavljajo vodo in vodno paro v toplotnem ravnovesju. Vlogi spremenljivk lahko zamenjamo in zapišemo $P = P(T)$ ter govorimo o tlaku, pri katerem sta voda in para pri dani temperaturi v toplotnem ravnovesju. V prvem primeru govorimo o vrelišču vode, v drugem pa o tlaku pare, tako imenovanem *nasičenem parnem tlaku*, ki je v ravnovesju z vodo. Tisto, kar je enako v enem in drugem primeru, je, da temperatura in tlak nista neodvisni količini, če zahtevamo, da sta voda in njena para v toplotnem ravnovesju.



Slika 2.2: Vrelna krivulja določa zvezo med tlakom P in temperaturo $T(P(T))$, pri katerih sta kapljevina in njena para v ravnovesju

Vrelno krivuljo lahko eksperimentalno določimo s *Papinovim loncem* (slika 2.3). Zaklopko na-

stavimo tako, da je v loncu predpisan tlak P , na primer 2 bar, ki ga lahko odčitamo na manometru. Vodo, katere temperaturo kaže termometer, začnemo segrevati. Ko se temperatura ustali, ima voda temperaturo vrelišča, kakor jo določa vrelna krivulja $T = T(P)$. Ker tlak v loncu zaradi nastavitve zaklopke ne more preseči vrednosti P , se temperatura vode ustali pri prej omenjeni vrednosti. Pri tlaku $P = 2 \text{ bar}$, je to $T(P = 2 \text{ bar}) = 120^\circ\text{C}$. Lahko pa poskus spremenimo tako, da vodo v loncu najprej kuhamo toliko časa, da je v loncu poleg vode samo vodna para. Nato zaklopko trdno zapremo in vodo segrejemo do neke izbrane temperature (T). Tlak $P(T)$, ki ga odčitamo na manometru, je tlak pare, ki je v toplotnem ravnovesju z vodo pri temperaturi T . Tako paro imenujemo *nasičena para*, njen tlak pa nasičeni parni tlak ali *izparilni tlak*. To je tlak, pri katerem voda zavre, ko doseže temperaturo T .



Slika 2.3: Papinov lonec

Fazni diagram lahko narišemo tudi tako, da namesto tlaka in temperature (P, T) uporabimo kateri koli drugi par termodinamskih spremenljivk (P, V) ali (T, V), pri čemer je V prostornina dane množine snovi. Oglejmo si fazni diagram v ravnini (T, V) (slika 2.4) in na njem izberimo točko a , ki predstavlja dano množino *nenasičene* pare pri temperaturi T . Predstavljajmo si, da paro stiskamo pri stalni temperaturi. Točka a se na diagramu, na katerem na abscisno os nanašamo prostornino, na ordinatno pa temperaturo, pri stiskanju pomika v levo vzdolž premice, ki je vzporedna z abscisno osjo. Pri tem se tlak pare večja in v točki A naj bo njena prostornina V_p , tlak pa je enak izparilnemu tlaku pri temperaturi T . Ob nadaljnjem stiskanju se začne para *kondenzirati*, to je spreminjati v vodo (kapljevino), in delež pare se manjša. V točki B se vsa para kondenzira. Nastala vrele vode ima prostornino V_v . Prostornini izbrane množine nasičene pare V_p in vrele vode V_v sta seveda odvisni od temperature vrelišča T . Njuno odvisnost od temperature prikazujeta krivulji na sliki. Območji levo in desno od šrafiranega dela pripadajo kapljevinski in plinasti fazi. Tako imamo na primer v točki C vrelo vodo in nasičeno paro, ki sta v toplotnem ravnovesju. Različne točke na daljici $\overline{AB}$ predstavljajo toplotno ravnovesje vrele vode in nasičene pare v različnih prostorninskih razmerjih. Naj bo skupna prostornina vrele vode in nasičene

pare v točki C enaka V , pri čemer je delež pare enak x , vrele vode pa $1 - x$, tako da velja

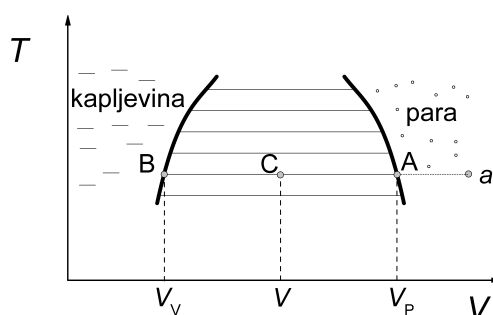
$$V = x V_p + (1 - x) V_v .$$

Iz gornje enačbe sledi

$$x = \frac{V - V_v}{V_p - V_v}$$

ter

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{\frac{V - V_v}{V_p - V_v}}{1 - \frac{V - V_v}{V_p - V_v}} = \frac{V - V_v}{V_p - V} \equiv \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} .$$



Slika 2.4: Fazni diagram v ravlini (T, V) . Točke, ki leže na grafu na sliki 2.2 na vrelni krivulji, pokrivajo celotno šrafirano območje.

Preglednica 2.1: Vrelišče vode (T), gostota vrele vode (ρ_v), gostota nasičene pare ($\rho_p^{(n)}$) in specifična izparilna toplota (q_i) v odvisnosti od tlaka (P)

P (bar)	T (°C)	ρ_v (kg/m ³)	$\rho_p^{(n)}$ (kg/m ³)	q_i (MJ/kg)
0,006	0	1000	0,0048	2,50
0,0123	10	1000	0,0094	2,48
0,0233	20	998	0,0173	2,45
0,123	50	988	0,083	2,38
1,01	100	958	0,60	2,26
1,98	120	943	1,12	2,20
10,0	180	887	5,2	2,01
40,2	250	799	20	1,72
120,5	325	654	71	1,19
165,6	350	572	114	0,89
220,5	374	326	326	0

Fazni diagram, pri katerem na ordinatno os nanašamo tlak namesto temperature, je po obliki enak diagramu (T, V) . Oba diagrama, tako (T, V) kakor tudi (P, V) , se precej razlikujeta od faznega diagrama v ravnini (P, T) . Točke, kjer sta vrelna voda in nasičena para v toplotnem ravnovesju in ležijo na diagramu (P, T) na vrelni krivulji, pokrivajo na diagramih (T, V) in (P, V) segment površine. To je zato, ker imata fazi, ki sta v toplotnem ravnovesju, enak tlak in enako temperaturo, njuni gostoti pa sta različni.

Preglednica 2.2: Parni tlak ledu na intervalu od 0°C do -20°C

$T (^{\circ}\text{C})$	$P (\text{Pa})$	$T (^{\circ}\text{C})$	$P (\text{Pa})$
0,0	611,15	-10,0	259,90
-0,5	586,45	-10,5	248,59
-1,0	562,67	-11,0	237,74
-1,5	539,77	-11,5	227,32
-2,0	517,72	-12,0	217,32
-2,5	496,49	-12,5	207,73
-3,0	476,06	-13,0	198,52
-3,5	456,39	-13,5	189,69
-4,0	437,47	-14,0	181,22
-4,5	419,27	-14,5	173,09
-5,0	401,76	-15,0	165,30
-5,5	384,92	-15,5	157,83
-6,0	368,73	-16,0	150,68
-6,5	353,16	-16,5	143,82
-7,0	338,19	-17,0	137,25
-7,5	323,80	-17,5	130,95
-8,0	309,98	-18,0	124,92
-8,5	296,70	-18,5	119,15
-9,0	283,94	-19,0	113,62
-9,5	271,68	-19,5	108,33
		-20,0	103,26

Prehod snovi iz ene faze v drugo je vedno povezan s sprejemanjem ali oddajanjem toplote. Če hočemo dano množino vode pri temperaturi vrelišča spremeniti v paro, ji moramo dovesti ustrezno množino toplote. Če se para spremeni nazaj v kapljevino (se kondenzira), odda enako množino toplote. Ker se fazne spremembe odvijajo pri stalnem tlaku, sledi iz prvega zakona termodinamike

$$dW_n = dQ - P dV$$

in

$$dQ = dW_n + P dV = d(W_n + P V) \equiv dH . \quad (2.1)$$

W_n je notranja energija snovi, H pa tako imenovana *entalpija*, ki je tako kakor notranja energija funkcija stanja. Iz enačbe (2.1) tako sledi, da je dovedena ali oddana toplota pri fazni spremembi enaka

spremembi entalpije snovi, ko se ji spremeni agregatno stanje. Tako m kilogramov snovi pri prehodu iz faze 1 v fazo 2 prejme ali odda toploto Q_{12} , ki je enaka razliki entalpij snovi v obeh fazah. Z enačbo to zapišemo:

$$Q_{12} = H_2 - H_1 = m q_{12} .$$

Če poteka fazna sprememba v nasprotni smeri, velja $Q_{21} = -Q_{12}$. Če torej snov pri prehodu iz faze 1 v fazo 2 toploto sprejme, jo pri obratni fazni spremembi ravno toliko odda. Če se na primer voda spremeni iz kapljevine v paro, imenujemo količino q_{12} *specifična izparilna toplota* in jo običajno označujemo s q_i . Če se led tali, pa imenujemo količino q_{12} *specifična talilna toplota* in jo označujemo s q_t . Enota za q_{12} je razvidna iz definicije: $[q_{12}] = [\Delta H]/[m] = \text{J/kg}$. Ko se pri tlaku 1 bar in temperaturi 0°C stali 1 kg ledu, mu moramo dovesti 336 kJ toplote, tako da je $q_t = 336 \text{ kJ/kg}$. Ko pri temperaturi 100°C in tlaku $P = 1 \text{ bar}$ izpari 1 kg vrele vode, ji moramo dodati 2,26 MJ toplote. Torej, $q_i = 2,26 \text{ MJ/kg}$.

Primer 2.1: *Primerjaj razliko med entalpijo in notranjo energijo pri taljenju 1 kg ledu in izparevanju enake količine vrele vode!*

Rešitev: Razlika med entalpijo in notranjo energijo je pri trdnih snoveh in kapljevinah razmeroma majhna in jo smemo največkrat zanemariti. Ko se na primer stali 1 kg ledu pri temperaturi 0°C in tlaku $P = 1 \text{ bar}$, se mu notranja energija poveča za

$$\Delta W_n = \Delta H - P \Delta V = m q_t - P \Delta V .$$

$$\Delta V = V_{\text{voda}} - V_{\text{led}} = \frac{m}{\rho_{\text{voda}}} - \frac{m}{\rho_{\text{led}}} = -m \left(\frac{\rho_{\text{voda}} - \rho_{\text{led}}}{\rho_{\text{voda}} \rho_{\text{led}}} \right) .$$

Če upoštevamo, da je pri navedeni temperaturi in tlaku $\rho_{\text{led}} = 0,92 \text{ g/cm}^3$ in $\rho_{\text{voda}} = 1 \text{ g/cm}^3$, sledi $\Delta V = -0,087 \text{ dm}^3$. Tako dobimo:

$$\Delta W_n = 336 \text{ kJ} + 10^5 \text{ Nm}^{-2} \cdot 0,087 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 336 \text{ kJ} + 8,7 \text{ J} \approx 336 \text{ kJ} = \Delta H .$$

Drugače je, ko izpari 1 kg vrele vode pri temperaturi 100°C in tlaku 1 bar. Tedaj imamo:

$$\Delta W_n = \Delta H - P (V_{\text{para}} - V_{\text{voda}}) \approx \Delta H - P V_{\text{para}} .$$

$$P V_{\text{para}} = \frac{m}{M} R T ,$$

kjer smo vzeli, da se nasičena para obnaša kakor idealen plin. Sledi:

$$\Delta W_n = \Delta H - \frac{m}{M} R T = 2,26 \text{ MJ} - \frac{1}{18} \cdot 8300 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 373 \text{ K} = 2,26 \text{ MJ} - 0,17 \text{ MJ} = 2,09 \text{ MJ} .$$

Vrela krivulja pomeni zvezo med tlakom nasičene pare in njeno temperaturo, to je odvisnost izparilnega tlaka od temperature. Ker se prostornina vrele vode, ko izpari, močno poveča (prostornina 1 kg vrele vode se poveča 1600-krat, ko izpari pri 100°C), nasičeni parni tlak z rastočo temperaturo narašča. Če temperature niso previsoke, se nasičena para obnaša kakor idealen plin in v tem primeru določa odvisnost nasičenega parnega tlaka od temperature sorazmerno preprosta enačba. Izpeljemo jo z uporabo *Clausius - Clapeyronove enačbe*:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\frac{q_i}{T}}{\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_v}} = \frac{\rho_v \rho_p q_i}{T (\rho_v - \rho_p)} ,$$

kjer je ρ_p gostota pare, ρ_v gostota vrele vode in q_i specifična izparilna toplota vode pri temperaturi T . Ker je pri obravnavanih temperaturah $\rho_v \gg \rho_p$, sledi

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{\rho_p q_i}{T}.$$

Če upoštevamo plinsko enačbo in izrazimo gostoto pare $\rho_p = MP/RT$, kjer je M kilomolska masa vode, dobimo

$$\frac{dP}{dT} \approx q_i \frac{M P}{R T^2}$$

ali

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dT} \equiv \frac{d \ln P}{dT} = \frac{M q_i}{R T^2} \equiv - \frac{d}{dT} \left(\frac{M q_i}{R T} \right).$$

Zanemarili smo odvisnost specifične izparilne toplote od temperature. Sledi:

$$\frac{d}{dT} \left(\ln P + \frac{M q_i}{R T} \right) = 0 \rightarrow \ln P + \frac{M q_i}{R T} = \text{const}.$$

Tako imamo rezultat

$$P(T) = C e^{-M q_i / RT}, \quad (2.2)$$

kjer je C integracijska konstanta. Tlak nasičene pare z rastočo temperaturo eksponentno narašča.

Pri izparevanju vode je nad gladino običajno poleg pare prisoten tudi zrak. Celoten tlak nad gladino vode je tako enak vsoti delnega tlaka zraka in pare. Na splošno prisotnost zraka ne vpliva dosti na ravnovesje med vrelo vodo in njeno paro. Voda izpareva toliko časa, dokler delni tlak pare ni enak nasičenemu parnemu tlaku pri temperaturi vode. Prisotnost zraka pa se veliko bolj izraža v samem izparevanju. Če je nasičeni parni tlak pri dani temperaturi vode manjši od celotnega tlaka nad njeno gladino, voda izpareva počasi in le v tanki plasti ob gladini. Tako izparevanje običajno imenujemo *izhlapevanje* in poteka pri temperaturah, ki so manjše od 100°C , če voda izpareva v odprti posodi pri normalnem tlaku. Če ni vetra, delni tlak pare ob gladini vode hitro doseže vrednost nasičenega parnega tlaka in hitrost nadaljnjega izhlapevanja je potem odvisna od razširjanja ali *difuzije* pare v okoliški zrak. Zato voda ob prisotnosti vetra hitreje izhlapeva kakor v mirnem zraku.

Če pa je nasičeni parni tlak pri dani temperaturi vode enak ali celo malenkostno večji od celotnega tlaka nad gladino vode, ta burno vre. To vidimo, kadar voda izpareva pri 100°C v odprti posodi. Na stenah posode opazimo tvorbo mehurčkov pare, ki naraščajo zaradi dotoka nove pare v mehurčke. Ti se slej ko prej odlepijo od stene, dvignejo na površino in pri dviganju povzročajo mešanje vrele vode. S površine vode v okoliški zrak je viden tok pare.

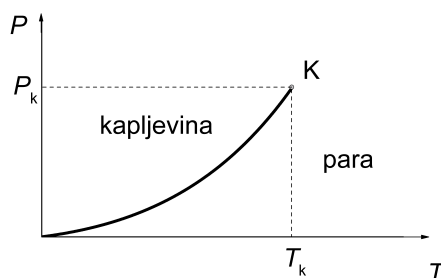
Zaradi vpliva *površinske napetosti* vode mehurčki pare ne nastajajo spontano v notranjosti čiste vode. Za to so potrebna tako imenovana *vrelna jedra*. To so lahko drobni mehurčki plinov, ki so prisotni na stenah posode ali se tam nabirajo, ko se v vodi raztopljeni plini ob segrevanju izločajo. Ko doseže voda temperaturo vrelišča, se na teh jedrih tvorijo mehurčki pare. Če poskrbimo, da je voda kemično čista in ne vsebuje raztopljenih plinov ter da ti niso niti na stenah posode, lahko vodo *pregrejemo*, tako da ima temperaturo, ki je višja od temperature vrelišča pri danem tlaku in je še vedno v kapljevinskem stanju. Nasprotno se pregreto izognemo tako, da v vodo dodamo vrelna jedra v obliki koščkov stekla, na

katerih je vedno ujetega nekaj zraka. *Pregreta* voda predstavlja *metastabilno stanje*. Voda v takem stanju sicer lahko obstaja kratek čas, a se ravnovesje poruši takoj, ko vanjo vržemo na primer košček stekla. Pri tem izpari tolikšen del vode, da se preostala voda ohladi na temperaturo vrelišča.

Tudi čisto nasičeno paro, ki ni v stiku z vodo, lahko s počasnim ohlajanjem pri stalnem tlaku ohladimo, ne da bi se del pare kondenziral. Tako paro, ki je prav tako v metastabilnem stanju, imenujemo *podhlajena* ali *prenasičena para*. Tudi tu ravnovesje porušimo tako, da dodamo *kondenzacijska jedra* v obliki majhnih prašnih delcev (smog). Pri tem se del pare v hipu kondenzira, preostala para pa se segreje na temperaturo vrelišča pri tlaku pare. Čisto nasičeno paro najlažje podhladimo tako, da jo adiabatno raztegnemo.

Podobno lahko vodo v čisti steklenici ohladimo pri tlaku 1 bar pod 0°C . Taka voda je *podhlajena*. Ko vanjo vržemo zrnice ledu, začne hitro zmrzovati. Nastali led ima temperaturo 0°C in tudi okoliška voda se hitro segreje na to temperaturo. Če smo vodo podhladili, na primer na -20°C , in vanjo vržemo košček ledu, v hipu zmrzne $1/4$ vode.

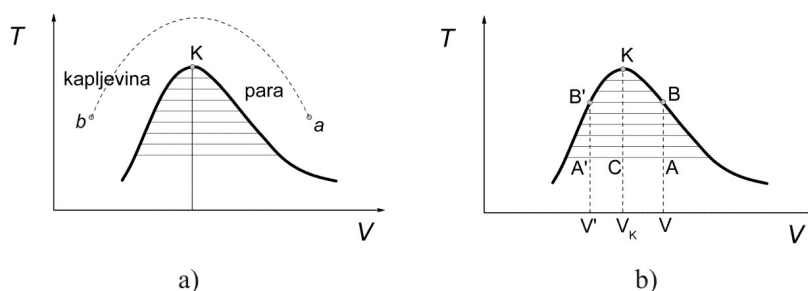
Kakor je razvidno iz enačbe (2.2), tlak nasičene pare z višanjem temperature hitro narašča. S tem narašča tudi gostota nasičene pare (glej preglednico 2.1). Pri določeni temperaturi sta gostoti nasičene pare in vrele vode enaki. Med njima tedaj ni nobene razlike. To pomeni, da se na diagramu $P - T$ vrelna krivulja pri tej temperaturi konča (slika 2.5). To točko na faznem diagramu imenujemo *kritična točka* in ustrezni vrednosti temperature in tlaka sta *kritična temperatura* T_k in *kritični tlak* P_k . Pri vodi sta ti dve vrednosti enaki $T_k = 374^\circ\text{C}$ in $P_k = 220,5$ bar. Na diagramu $T - V$ in podobno na diagramu $P - V$ se krivulji, ki omejujeta območje, na katerem sta vrelna voda in nasičena para v toplotnem ravnovesju, srečata v kritični točki, ker sta gostoti teh dveh faz v tej točki, $T = T_k$ in $V = V_k$, enaki. Prostornina V_k je prostornina dane množine snovi pri kritičnem tlaku in kritični temperaturi, tako imenovana *kritična prostornina*. Ko se snov, na primer voda, približuje kritični točki, se manjša tudi specifična izparilna toplota, ki je v tej točki enaka nič.



Slika 2.5: Vrelna krivulja se konča pri kritični temperaturi T_k in kritičnem tlaku P_k

Obstoj kritične točke, pri kateri se vrelna krivulja konča, zelo jasno kaže, da med kapljevino in paro ni nobene bistvene razlike. Na grafu $T - V$ lahko to zelo nazorno pokažemo (slika 2.6). Na grafu izberimo dve stanji vode (točki a in b), ki imata zelo različni gostoti. Stanje b z večjo gostoto predstavlja vodo, stanje a z veliko manjšo gostoto, pa paro. Če paro v stanju a stisnemo pri stalni temperaturi, jo lahko spremenimo v vodo v stanju b . Pri tem gre snov skozi množico vmesnih stanj (šrafirani del), ko sta para in vrelna voda v ravnovesju. Lahko pa paro v stanju a spremenimo v vodo v stanju b tudi tako, da jo

hkrati segrevamo, ohlajamo in stiskamo tako, da vmesna stanja ležijo na črtkani krivulji, ki je prikazana na grafu na sliki 2.6 in povezuje točki a in b . Ker črtkana krivulja poteka nad kritično točko (K), snov v nobenem vmesnem stanju ni hkrati v obeh fazah. Za vsako vmesno stanje izbrane množine snovi je na črtkani krivulji značilno, da je snov homogena po celotni prostornini, ki jo zapolnjuje.



Slika 2.6: Med kapljevino in paro ni nobene bistvene razlike, kar dokazuje obstoj kritične točke (a). Praktična ponazoritev obstoja kritične točke (b).

S pomočjo grafa na sliki 2.6a tudi zlahka ugotovimo, kaj se zgodi, če v majhni, zataljeni ampuli segrevamo primerno izbrano množino kapljevine, kot je na primer eter (s kritično temperaturo $T_k = 197^\circ\text{C}$ in kritičnim tlakom $P_k = 36$ bar), ki je v ravnovesju z nasičeno paro. Ker je skupna prostornina stalna (raztezanje stekla zanemarimo), se ob segrevanju na grafu $T - V$ pomikamo po navpični črti. Če je za izbrano množino snovi prostornina ampule večja od njene kritične prostornine V_k , se ob segrevanju pomikamo navzgor po navpičnici, ki jo predstavlja črtkana črta $\overline{AB}$ na grafu 2.6b. Ob segrevanju se delež kapljevine zmanjšuje, delež pare pa večja, tako da se gladina kapljevine niža. Ko dosežemo točko B , gladina izgine na dnu ampule, v kateri imamo le paro (slika 2.6b). Če je prostornina ampule manjša od kritične prostornine izbrane množine snovi, se ob segrevanju pomikamo navzgor po navpičnici $\overline{A'B'}$, pri čemer se vse več pare kondenzira. Gladina kapljevine v ampuli se dviga in izgine na vrhu ampule, ko dosežemo točko B' (slika 2.6b). Če pa je prostornina ampule enaka kritični prostornini, se ob segrevanju pomikamo po navpičnici $\overline{CK}$ in meja med paro in kapljevino izgine nekje na sredini ampule, ko dosežemo kritično točko.

Trdne snovi se bistveno razlikujejo od kapljev in plinov po tem, da so v splošnem *anizotropne*, kar pomeni, da vse smeri v kristalu niso enakovredne. Prehod iz kapljevine v trdno stanje s kristalno strukturo zato v nobenem primeru ne more biti zvezen tako, kakor smo to ugotovili pri prehodu iz plinastega v kapljevinsko stanje ali nasprotno. Za vsako vmesno stanje pri prehodu iz kapljevinske faze v trdno, na primer, lahko z gotovostjo rečemo, da je snov v kapljevinskem ali trdnem stanju. Zaradi tega *talilna krivulja*, ki določa odvisnost tališča snovi od temperature, nima kritične točke.

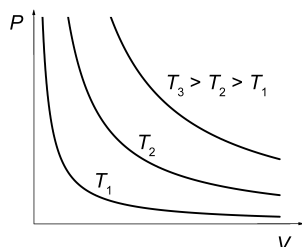
Plinska enačba v obliki

$$PV = \frac{m}{M} RT \quad (2.3)$$

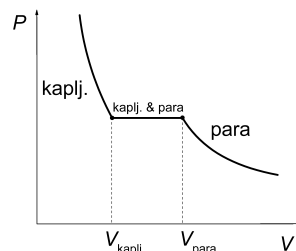
velja samo za dovolj razredčene pline. Izoterme ($T = \text{const}$) takega *idealnega plina* so torej enakoosne hiperbole (slika 2.7). V resnici pa se lastnosti plina, ko ga stiskamo, vse bolj razlikujejo od lastnosti idealnega plina. Pri dovolj velikem tlaku in temperaturi, ki je manjša od kritične, plin slej ko prej kondenzira in se spremeni v kapljevino. Izoterma *realnega plina* je prikazana na sliki 2.8. Ena od enačb, ki

Preglednica 2.3: Kritična temperatura T_k , kritični tlak P_k in kritična gostota ρ_k nekaterih snovi

Snov	T_k (K)	P_k (10^5 N/m ²)	ρ (kg/m ³)
voda	647,2	221,3	324
alkohol	516,6	63,9	280
eter	467	36	260
CO ₂	304,2	74	460
O ₂	154,4	50,3	430
H ₂	33,2	13	31
⁴ He	5,25	2,29	69
³ He	3,33	1,16	41



Slika 2.7: Izoterme idealnega plina

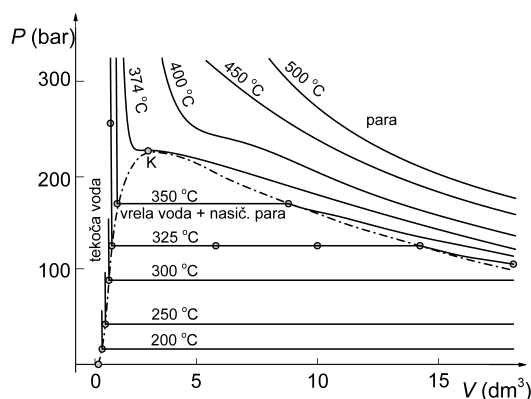


Slika 2.8: Izoterme realnega plina

dovolj dobro popiše tako obnašanje realnega plina, se imenuje *van der Waalsova enačba*. Izoterme vode so prikazane na sliki 2.9.

Ob koncu omenimo še tako imenovano *trojno točko*. Kakor smo že povedali, sta dve fazi v toplotnem ravnovesju le pri določeni temperaturi, ki je odvisna od tlaka, $T = T(P)$. Na grafu $P - T$ ležijo točke, v katerih sta dve fazi v ravnovesju, na krivulji. Če je snov lahko v treh različnih fazah, trdni, kapljevinski in plinasti, so na faznem diagramu tri krivulje, in sicer, *vrelna krivulja*, *talilna krivulja* in *sublimacijska krivulja*. Iz povedanega sledi, da so vse tri faze hkrati v ravnovesju le v eni točki, ki se imenuje *trojna točka* in v kateri se sekajo prej omenjene krivulje. Vse tri faze vode, to so led, tekoča voda in para, so lahko hkrati v ravnovesju le pri temperaturi $+0,01$ °C in pri tlaku 0,0061 bar.

Značilen fazni diagram snovi, ki je lahko v treh fazah, trdni, kapljevinski in plinasti, je prikazan na sliki 2.10. Strmina talilne krivulje ($dP/dT > 0$) predpostavlja, da je gostota kapljevine manjša od gostote trdne snovi. To pomeni, da se pri taljenju snovi prostornina poveča ($\rho_t > \rho_k$), kar je značilno za večino snovi. Za nekatere snovi, med katere spada tudi voda, pa se snovi pri taljenju prostornina zmanjša ($\rho_t < \rho_k$). V tem primeru je strmina talilne krivulje nagnjena v nasprotno stran ($dP/dT < 0$, slika 2.11). Iz faznega diagrama tudi razberemo, da lahko snov pri dovolj nizkem tlaku in temperaturi preide neposredno iz trdnega v plinasto stanje, ne da bi se poprej stalila. Ogljikov dioksid CO₂ na zraku *sublimira*, ker je njegova trojna točka pri tlaku 5,17 bar in temperaturi $-56,6$ °C.



Slika 2.9: Izoterme za 1 kilogram vode

2.2 Vlaga v zraku

Zrak, ki vsebuje vodno paro, imenujemo *vlažen zrak*. *Absolutno vlažnost* zraka opredelimo tako, da povemo maso vodne pare m_p v dani prostornini zraka V . Lahko jo izrazimo tudi z *delno gostoto* vodne pare v zraku,

$$\rho_p = \frac{m_p}{V} = \frac{P_p M_p}{RT}, \quad (2.4)$$

pri čemer smo vzeli, da velja za paro plinska enačba (2.3). Tlak P_p je *delni tlak* vodne pare v zraku, $M_p = 18$ kg pa kilomolska masa vode. Kot lahko razberemo iz faznega diagrama vode, delni tlak pare v zraku ne more preseči tlaka nasičene pare pri temperaturi zraka. Zato je pomembna *vlažnost - relativna vlažnost* η , ki je definirana kot kvocient delnega tlaka pare P_p in tlaka nasičene pare $P_p^{(n)}$ pri temperaturi zraka,

$$\eta = \frac{P_p}{P_p^{(n)}} = \frac{\frac{P_p M_p}{RT}}{\frac{P_p^{(n)} M_p}{RT}} = \frac{\rho_p}{\rho_p^{(n)}}, \quad (2.5)$$

Primer 2.2: Naj bo delni tlak vodne pare v zraku s temperaturo 20°C enak $P_p = 0,0123$ bar. Izračunaj relativno vlažnost takšnega zraka in količino vodne pare v 1 m^3 zraka!

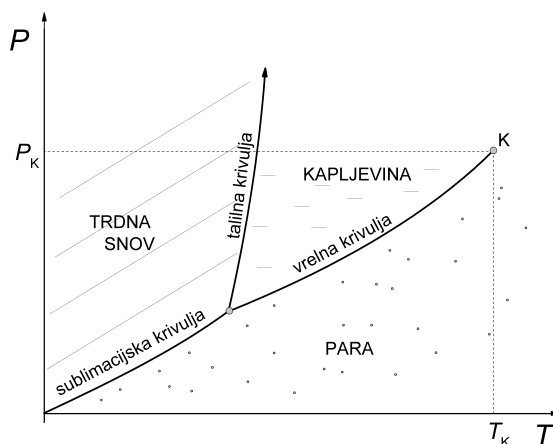
Rešitev: Ker je tlak nasičene pare pri tej temperaturi $P_p^{(n)} = 0,0233$ bar (glej preglednico 2.1), je relativna vlažnost takega zraka

$$\eta = \frac{0,0123 \text{ bar}}{0,0233 \text{ bar}} = 0,53.$$

Relativna vlažnost tega zraka je torej 53 %. V vsakem kubičnem metru tega zraka je

$$m_p = \frac{P_p M_p}{RT} V = \frac{0,0123 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 18 \text{ kg}}{8300 \text{ J K}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} \cdot 1 \text{ m}^3 \approx 9 \text{ g}$$

vodne pare. V 1 m^3 nasičeno vlažnega zraka pri tej temperaturi pa je približno 17 g vodne pare.



Slika 2.10: Tipičen fazni diagram snovi, pri kateri temperatura tališča narašča z naraščajočim tlakom

Zrak je nasičeno vlažen, kadar je delni tlak vodne pare enak nasičenemu parnemu tlaku pri temperaturi zraka. Taka je vlažnost ob deževnem ali meglenem vremenu. Ker se nasičeni parni tlak z manjšanjem temperature niža, je razumljivo, da nenasičeno vlažen zrak postane nasičeno vlažen, če se dovolj ohladi ob nespremenjenih delnih tlakih. Tako postane zrak s temperaturo 20°C in delnim tlakom vodne pare $P_p = 0,0123$ bar nasičeno vlažen, če se ohladi na 10°C . Nasičeni parni tlak pri temperaturi 10°C je namreč enak $0,0123$ bar, kakor je razvidno iz preglednice 2.1. Temperaturo, pri kateri nenasičeno vlažen zrak postane nasičeno vlažen, imenujemo *rosišče*.

Ko se zrak ohladi pod temperaturo rosišča, postane za hip *prenasičeno vlažen*. Takoj nato se začne para kondenzirati na tleh in preostalih površinah kot *rosa*. Tudi vsak prašni delec se „obleče“ s tanko plastjo vode, tako nastane megla ali oblak. Drobci prahu v zraku so *kondenzacijska jedra*. Brez kondenzacijskih jeder nastane megla le pri dovolj veliki podhladitvi. Če se vlažen zrak ohladi pod 0°C , se na tleh ali drugih hladnih površinah nabere *slana*. To se največkrat zgodi ob jasnih nočeh, ko se površina Zemlje zaradi sevanja ohladi pod nič stopinj Celzija.

Primer 2.3: Določi gostoto zraka v odvisnosti od relativne vlažnosti η !

Rešitev: V dani prostornini zraka V naj bo masa suhega zraka m_z , masa pare pa m_p . Gostota mešanice suhega zraka in pare je torej enaka

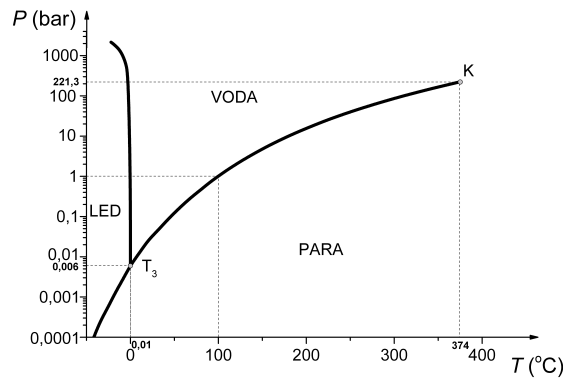
$$\rho = \frac{m_z}{V} + \frac{m_p}{V} = \rho_z + \rho_p.$$

Ko upoštevamo plinsko enačbo (2.3), sledi

$$\rho = \frac{P_z M_z}{R T} + \frac{P_p M_p}{R T},$$

kjer je P_z delni tlak suhega zraka, P_p delni tlak pare ter $M_z \approx 29$ kg in $M_p = 18$ kg kilomolski masi zraka in pare. Celotni tlak vlažnega zraka P je enak vsoti delnih tlakov, to je

$$P = P_z + P_p.$$



Slika 2.11: Fazni diagram vode

Delni tlak suhega zraka izrazimo z enačbo $P_z = P - P_p$ in vstavimo v enačbo za gostoto, pa dobimo

$$\rho = \frac{P M_z}{R T} - \frac{P_p M_p}{R T} \left(\frac{M_z}{M_p} - 1 \right).$$

Delni tlak pare lahko izrazimo z nasičenim parnim tlakom pri temperaturi zraka in relativno vlažnostjo s pomočjo enačbe (2.5). Tako imamo $P_p = \eta P_p^{(n)}(T)$ in

$$\rho = \frac{P M_z}{R T} \left[1 - \eta \frac{P_p^{(n)}}{P} \left(1 - \frac{M_p}{M_z} \right) \right].$$

Povprečno kilomolsko maso vlažnega zraka M_η definiramo na znan način, to je

$$\rho = \frac{P M_\eta}{R T}$$

in če to primerjamo s prejšnjim izrazom za gostoto, sledi

$$M_\eta = M_z \left[1 - \eta \frac{P_p^{(n)}}{P} \left(1 - \frac{M_p}{M_z} \right) \right].$$

2.3 Difuzija vodne pare

Vzemimo raztopino, v kateri je koncentracija topljenca na različnih mestih različna. Termično gibanje molekul povzroči mešanje raztopine in s tem spreminjanje koncentracije topljenca. Topljenec se prerazporedi z mest, na katerih je koncentracija velika, na mesta, na katerih je majhna. Proces teče toliko časa, dokler koncentracija ni enaka po celotni raztopini. Temu procesu pravimo *difuzija*. Podobno dogajanje smo opazili pri prevajanju toplote, ki teče od mest z višjo temperaturo k mestom, na katerih je temperatura nižja. Prevajanje se ustavi, ko se temperature izenačijo. Mehanizem procesa je tako v enem kakor v drugem primeru termično gibanje gradnikov.

Da bo matematična obravnava difuzije čim bolj preprosta, vzemimo, da se koncentracija raztopine c spreminja le vzdolž koordinatne osi x . Tako imamo $c = c(x, t)$. Gostoto difuzijskega toka j definiramo kot množino topljenca, ki se v časovni enoti prenese skozi enoto ploskve, ki je pravokotna na os x . Difuzijski tok v smeri pozitivne osi x bomo šteli pozitivno, v nasprotni smeri pa negativno. Ker se topljenec prenaša od mesta z visoko koncentracijo k mestu z nizko koncentracijo, je predznak difuzijskega toka nasproten predznaku koncentracijskega gradienta $\partial c / \partial x$. Če koncentracija pojema v smeri pozitivne osi x , teče difuzijski tok v tej smeri. Če je $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$, je koncentracija raztopine povsod enaka in ni difuzije. Za dovolj razredčene raztopine (majhne koncentracije) velja tako imenovani *Fickov zakon*,

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial x} ,$$

v katerem se konstanta D imenuje *difuzijski koeficient*.

Gostoto difuzijskega toka lahko definiramo na več načinov: na primer kot maso topljenca, ki se v časovni enoti prenese skozi enoto ploskve ali kot število molekul topljenca, ki se prenese skozi enoto ploskve, ki je pravokotna na smer toka. Pri tem moramo definirati koncentracijo enako, to je kot maso ali število molekul topljenca na enoto prostornine raztopine. Na ta način difuzijski koeficient ni odvisen od tega, kako definiramo difuzijski tok in koncentracijo raztopine.

Naj bo gostota difuzijskega toka j definirana na primer kot število molekul topljenca, ki v časovni enoti prečkajo enoto ploskve, ki je pravokotna na smer toka. Gostota difuzijskega toka ima torej enoto $[j] = 1/\text{m}^2\text{s}$. Koncentracijo topljenca moramo izraziti kot število molekul na enoto prostornine, to je $[c] = 1/\text{m}^3$. Tako dobimo za enoto difuzijskega koeficienta

$$[D] = \frac{[j]}{[\partial c / \partial x]} = \frac{1/\text{m}^2\text{s}}{1/\text{m}^4} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} .$$

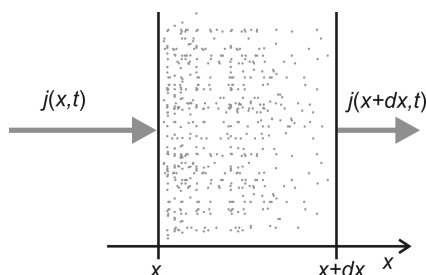
Fickov zakon velja ob predpostavki, da je termično gibanje molekul edini mehanizem, ki povzroča spreminjanje koncentracije topljenca v raztopini. V raztopini torej ni nikakršnih makroskopskih tokov ali mehanskega mešanja raztopine. Do takega mešanja namreč lahko pride zaradi sile teže. Če alkohol, ki je lažji od vode, previdno zlijemo v posodo z vodo, se bosta kapljevini mešali le zaradi difuzije. Če pa vodo zlijemo na alkohol, se bosta kapljevini dosti hitreje mešali zaradi sile teže kakor zaradi difuzije. Zaradi teže se namreč gostejša voda spušča, redkejši alkohol pa dviga in v posodi se pojavijo konvekcijski tokovi.

Z uporabo zakona o ohranitvi mase topljenca lahko izpeljemo - podobno kakor pri prevajanju toplote - enačbo, ki določa, kako se koncentracija v nehomogeni raztopini zaradi difuzije spreminja s časom. Sprememba mase topljenca v tanki plasti raztopine med x in $x + dx$ (slika 2.12) in s prečnim presekom S je posledica difuzijskega toka $j(x, t)$. Če je koncentracija definirana kot masa topljenca na enoto prostornine raztopine, je sprememba mase topljenca v izbrani plasti

$$S dx dc = S [j(x, t) - j(x + dx, t)] dt .$$

Upoštevamo Fickov zakon, pa imamo

$$S dx dc = S D \frac{\partial}{\partial x} [c(x + dx, t) - c(x, t)] dt .$$



Slika 2.12: K izpeljavi difuzijske enačbe

Nadalje upoštevamo, da je $c(x + dx, t) = c(x, t) + \frac{\partial c}{\partial x} dx + \dots$, vstavimo v zgornjo enačbo, ter obe strani dobljene enačbe delimo z $dx dt$, in dobimo tako imenovano *difuzijsko enačbo*,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Posplošitev enačb na tri dimenzije je preprosta in jih zapišemo enako kakor pri prevajanju toplote:

$$\vec{j} = -D \nabla c$$

in

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c,$$

kjer je $c = c(x, y, z, t)$.

Primer 2.4: Ko voda izhlapeva v odprti posodi (temperatura zraka nad vodo naj bo precej manjša od temperature vrelišča pri normalnem tlaku), delni tlak vodne pare v tanki plasti zraka tik nad gladino vode zelo hitro doseže vrednost nasičenega parnega tlaka. Če je zrak miren, se nadaljnje izhlapevanje precej upočasni in hitrost izhlapevanja je določena s hitrostjo difuzije pare v okoliški zrak. Določi gostoto difuzijskega toka, če je temperatura zraka 20°C in je difuzijski koeficient za paro v zraku pri tej temperaturi $D = 0,23 \text{ cm}^2/\text{s}$!

Rešitev: Izberimo koordinatni sistem tako, da je os x pravokotna na gladino vode in usmerjena v zrak nad njo. Koordinatno izhodišče postavimo na gladino vode. Koncentracija vodne pare v zraku je kar enaka absolutni vlažnosti, to je delni gostoti pare v zraku. Če vzamemo, da velja $\rho_p = \rho_p(x, t)$, lahko zapišemo difuzijsko enačbo takole:

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho_p}{\partial x^2}.$$

Tako kakor pri prevajanju toplote, moramo tudi pri difuzijski enačbi opredeliti robne in začetne pogoje. Robni pogoj pri $x \rightarrow \infty$ opredelimo tako, da zahtevamo

$$j(x \rightarrow \infty, t) = -D \left. \frac{\partial \rho_p}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0.$$

Da določimo robni pogoj ob gladini vode, upoštevamo, kar smo povedali zgoraj. Delna gostota vodne pare tik ob gladini vode je enaka gostoti nasičene pare $\rho_p^{(n)}$ pri temperaturi zraka. Ker je hitrost izhlapevanja

veliko hitrejša od difuzije, smemo vzeti, da velja

$$\rho_p(x=0, t) = \rho_p^{(n)} = \frac{P_p^{(n)} M_p}{R T} ,$$

pri čemer je tlak nasičene pare pri temperaturi 20 °C enak $P_p^{(n)}(T = 293 \text{ K}) = 0,0233 \text{ bar}$. Opredelimo še začetni pogoj:

$$\rho_p(x, 0) = 0 .$$

Zdaj bi lahko rešili difuzijsko enačbo enako, kakor smo reševali prevajanje toplote v neskončno dolgih palicah. Ker je difuzijska enačba enaka enačbi za prevajanje toplote, rešitev zapišemo tako, da v ustrezni rešitvi za prevajanje toplote zamenjamo $T \leftrightarrow \rho_p$ in $\chi \leftrightarrow D$. Tako dobimo

$$\rho_p(x, t) = A + B \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) ,$$

kjer sta A in B integracijski konstanti, ki ju določimo s pomočjo robnih in začetnega pogoja, ter

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi , \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1 .$$

Iz začetnega pogoja sledi $A + B = 0$, iz robnega pogoja pri $x = 0$ pa $A = \rho_p^{(n)}$. Torej je

$$\rho_p(x, t) = \rho_p^{(n)} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] .$$

Gostota difuzijskega toka, ki je usmerjen proč od gladine vode v okoliški zrak, je

$$j(x, t) = -D \frac{\partial \rho_p}{\partial x} = D \rho_p^{(n)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \frac{1}{2\sqrt{Dt}} = \rho_p^{(n)} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} .$$

Kakor je razvidno iz zadnjega rezultata, ima gostota difuzijskega toka singularnost pri $x = 0$. To je posledica izbranega robnega pogoja pri $x = 0$ in začetnega pogoja. Iz fizikalnih razlogov namreč sledi, da je

$$j(x=0, t \rightarrow 0) \leq \frac{1}{4} \rho_p^{(n)} \bar{v} ,$$

kjer je $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_p}}$ povprečna hitrost molekul vode v zraku, ki je pri temperaturi $T = 293 \text{ K}$ enaka $\bar{v} = 600 \text{ m/s}$. To trditev utemeljimo na naslednji način. Vzemimo, da je zrak nad gladino vode nasičeno vlažen in izračunajmo število vodnih molekul, ki priletijo na enoto površine gladine vode v časovni enoti. Označimo število molekul vode na enoto prostornine zraka v nasičeno vlažnem zraku z $n_p^{(n)}$. Vzemimo, da imajo vse molekule vode enako velikost hitrosti v in da so vse smeri gibanja enakovredne. Delež molekul na prostorninsko enoto, ki se v danem trenutku gibljejo proti gladini vode v smeri, ki oklepa z navpičnico kot θ , je enak

$$n_p^{(n)} \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} n_p^{(n)} \sin \theta d\theta .$$

Število molekul, ki priletijo v časovni enoti v tej smeri na enoto površine gladine, je

$$\frac{1}{2} n_p^{(n)} v \cos \theta \sin \theta d\theta .$$

Celotno število molekul vode, ki v časovni enoti priletijo na enoto površine gladine iz vseh smeri nad gladino, je torej enako

$$\frac{1}{2} n_p^{(n)} v \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} n_p^{(n)} v \int_0^1 \sin \theta d(\sin \theta) = \frac{1}{4} n_p^{(n)} v .$$

Ker pa nimajo vse molekule enako velike hitrosti, moramo v gornji izraz namesto hitrosti v zapisati povprečno hitrost $\bar{v}$. Če označimo maso vodne molekule z m_0 , sledi $\rho_p^{(n)} = m_0 n_p^{(n)}$ in gostota masnega toka vodnih molekul na gladini vode je

$$j_m = \frac{1}{4} \rho_p^{(n)} \bar{v} .$$

Ker je gostota nasičene pare pri 20 °C enaka 0,0173 kg/m³, je velikost gostote masnega toka v tem primeru enaka $j_m \approx 2,6 \text{ kg/m}^2\text{s} = 0,26 \text{ g/cm}^2\text{s}$.

Ugotovili smo torej, da na gladino vode, ki je v ravnovesju s svojo paro, prileti na vsak m² v sekundi $n_p^{(n)} \bar{v}/4$ vodnih molekul. Velika večina teh molekul obtiči v vodi, zato jih ravno toliko, to je približno $n_p^{(n)} \bar{v}/4$, odleti iz vsakega m² gladine v sekundi, tako da se ohranja ravnovesje (pri temperaturah pod vreliščem voda izhlapeva le v tanki plasti ob gladini). Če piha močan veter, tako da je zrak nad gladino vode praktično suh, je hitrost izhlapevanja (kg/m²s) približno enaka $\rho_p^{(n)} \bar{v}/4$.

Izraz za gostoto difuzijskega toka, ki smo ga izračunali zgoraj, velja le za $t > \tau$, kjer določimo čas τ tako, da zahtevamo $j(x=0, \tau) = j_m$, kar nam da $\tau = 16 D/\pi \bar{v}^2$. Če upoštevamo, da je pri $T = 293 \text{ K}$ povprečna hitrost $\bar{v} \approx 600 \text{ m/s}$ in $D \approx 0,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, sledi $\tau \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ s}$, kar je istega reda velikost kakor povprečen čas med dvema zaporednima trkoma molekul v zraku pri normalnih pogojih.

Difuzijska konstanta za vodno paro v zraku je v splošnem odvisna od temperature zraka in od zračnega tlaka. Njena vrednost pri absolutni temperaturi $T_0 = 273 \text{ K}$ in zračnem tlaku $P_0 = 10^5 \text{ N/m}^2 = 10^5 \text{ Pa}$ je $D_0 = 0,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$. Pokaže se[8], da je vrednost difuzijskega koeficienta vodne pare v zraku pri absolutni temperaturi T in zračnem tlaku P enaka:

$$D(T, P) = D_0 \frac{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1,81}}{\left(\frac{P}{P_0}\right)} = 0,23 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \frac{(T/T_0)^{1,81}}{P/P_0} . \quad (2.6)$$

Rezultat je razumljiv, če upoštevamo, da je difuzijski koeficient v plinih reda velikosti $D \approx \bar{v} l$, kjer je povprečna hitrost molekul $\bar{v} \propto \sqrt{T}$, povprečna prosta pot med dvema zaporednima trkoma molekul $l \propto T/P\sigma$. Tlak P je zračni tlak, σ pa je neka količina z dimenzijo površine in se imenuje *sipalni presek* ali *preseki za trke molekul*. Če zanemarimo temperaturno odvisnost preseka za trke, sledi¹ $D \propto T^{1,5}/P$. Vse, kar smo zgoraj povedali glede difuzije v plinih, velja le, če je povprečna prosta pot molekul v plinu l majhna v primerjavi z linearno razsežnostjo prostora L , to je $l/L \equiv K_n \ll 1$. Število K_n je tako imenovano *Knudsenovo število*. Za primerjavo naj povemo, da je povprečna prosta pot molekul v zraku pri normalnem tlaku 1 bar in temperaturi 0 °C približno $l \approx 10^{-7} \text{ m}$.

Fickov zakon za vodno paro v obliki

$$j = -D \frac{\partial \rho_p}{\partial x} \quad (2.7)$$

¹ Podobno velja $D_0 \propto \frac{T_0^{1,5}}{P_0}$ in $\frac{D}{D_0} = \frac{(T/T_0)^{1,5}}{(P/P_0)}$ ali $D = D_0 \frac{(T/T_0)^{1,5}}{(P/P_0)}$.

v gradbeni stroki običajno zapišemo tako, da delno gostoto pare ρ_p izrazimo s pomočjo plinske enačbe z delnim tlakom pare (2.4),

$$\rho_p = \frac{M_p}{R T} P_p .$$

Če je temperatura zraka stalna, lahko enačbo (2.7) prepišemo v obliki

$$j = - \frac{D M_p}{R T} \frac{\partial P_p}{\partial x} \equiv \delta \frac{\partial P_p}{\partial x} ,$$

$$\delta = \frac{D M_p}{R T} = \frac{D M_p}{R T_0} \cdot \frac{T_0}{T} .$$

Če upoštevamo enačbo (2.6), sledi

$$\delta = \frac{D_0 M_p}{R T_0} \cdot \frac{(T/T_0)^{0,81}}{P/P_0} \equiv \delta_0 \frac{(T/T_0)^{0,81}}{P/P_0} ,$$

kjer je

$$\delta_0 = \frac{D_0 M_p}{R T_0} = \frac{0,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \cdot 18 \text{ kg}}{8300 \text{ NmK}^{-1} \cdot 273 \text{ K}} \approx 2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m s Pa}} .$$

Difuzija vodne pare skozi pore gradbenega materiala poteka podobno kakor v zraku, le da je proces upočasnen zaradi same velikosti in konfiguracije por ter adsorpcije in kondenzacije na stenah por. Vse to lahko približno upoštevamo tako, da difuzijski koeficient pare v zraku zmanjšamo za nek faktor μ , ki ga imenujemo *difuzijska upornost materiala*. Ta količina je značilna za dano vrsto porozne snovi in je praktično neodvisna od temperature in tlaka. Tako zdaj zapišemo ustrezne difuzijske koeficiente za difuzijo vodne pare skozi porozni gradbeni material tako:

$$\tilde{D} = \frac{D}{\mu}$$

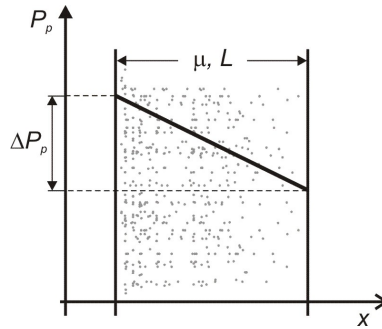
in

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\mu} .$$

Preglednica 2.4: Difuzijske upornosti nekaterih tipičnih vrst gradbenega materiala

Snov	μ
kamena volna	≈ 1
opeka	$\approx 9,5$
mavčna plošča	$\approx 8,3$
beton B25	≈ 110

Navedene vrednosti veljajo za suhe vrste materiala. Z naraščajočo vlažnostjo materiala se njegova difuzijska upornost v splošnem zmanjšuje.



Slika 2.13: Delni tlak pare v stacionarnem stanju pojema linearno v smeri difuzijskega toka

V stacionarnem stanju in pri stalni temperaturi je enako kakor pri prevajanju toplote gostota difuzijskega toka skozi vsak prečni presek materiala enaka. To pomeni, da je gradient tlaka konstanten (slika 2.13). Delni tlak pare torej pojema linearno v smeri toka. Če je debelina plasti poroznega materiala enaka L in ima difuzijsko upornost μ , sledi

$$j = \frac{\delta}{\mu} \cdot \frac{\Delta P_p}{L}, \quad (2.8)$$

kjer je ΔP_p razlika delnih tlakov pare med eno in drugo stranjo materiala. Če je stena sestavljena iz vrste različnih poroznih plasti z debelinami L_i in difuzijskimi upornostmi μ_i , velja za vsako plast posebej

$$j = \frac{\delta}{\mu_i L_i} \Delta P_{pi},$$

pri čemer je ΔP_{pi} ustrezna tlačna razlika v i -ti plasti. Zgornjo enačbo prepišemo v obliki

$$j \cdot \frac{\mu_i L_i}{\delta} = \Delta P_{pi}$$

in seštejemo prek vseh plasti. Dobimo:

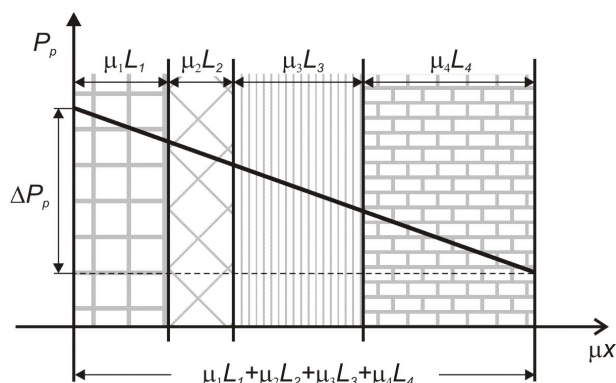
$$j = \frac{\delta}{\mu_i L_i + \dots + \mu_N L_N} \cdot \Delta P_p,$$

pri čemer je

$$\Delta P_p = \Delta P_{p1} + \Delta P_{p2} + \dots + \Delta P_{pN}$$

celotna tlačna razlika prek vseh plasti (slika 2.14).

Primer 2.5: Zrak na obeh straneh ravne navpične betonske stene z debelino 10 cm ima temperaturo 20 °C. Določi gostoto difuzijskega toka pare skozi zid, če je zrak na eni strani nasičeno vlažen, na drugi pa je zaradi vetra popolnoma suh!



Slika 2.14: Parni tlak v vseh plasteh pojema enako, če debeline plasti (L_i) nadomestimo z „efektivnimi“ debelinami $\mu_i L_i$

Rešitev: Gostoto difuzijskega toka pare najlažje izračunamo po enačbi (2.8), v katero vstavimo za tlačno razliko $\Delta P_p = 2330$ Pa. Sledi:

$$j = \frac{\delta}{\mu} \frac{\Delta P_p}{L} = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot (293/273)^{0,81} \cdot 2330}{110 \cdot 0,1} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}} \approx 4,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g}}{\text{m}^2 \text{ s}}.$$

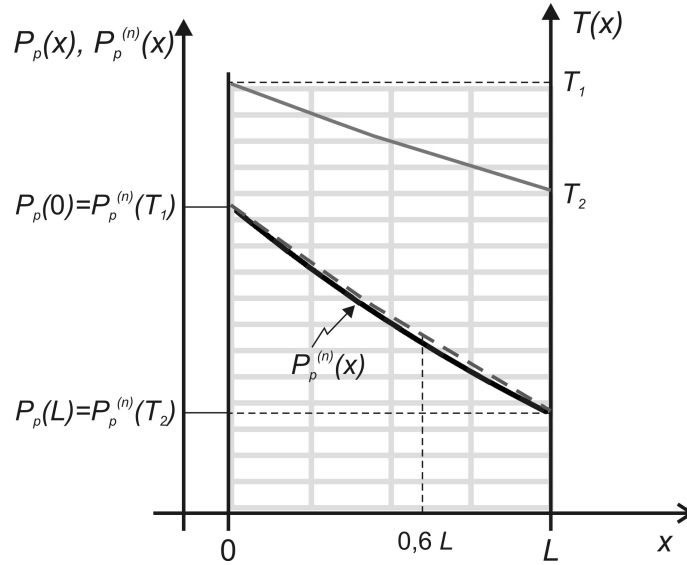
Ker je masa vodne molekule enaka $18 \text{ g} / 6 \cdot 10^{23} = 3 \cdot 10^{-23} \text{ g}$, to pomeni, da skozi vsak m^2 zidu pride vsako sekundo približno $1,5 \cdot 10^{18}$ molekul vode. Za primerjavo naj navedemo, da je v 1 cm^3 zraka pri tlaku 1 bar in temperaturi 0°C približno $3 \cdot 10^{19}$ molekul.

Ko smo obravnavali difuzijo vodne pare v zraku, smo vzeli, da sta temperatura zraka in tudi celoten zračni tlak stalna po celotni prostornini. Difuzija vodne pare je torej posledica neenakomernosti delnega tlaka vodne pare v zraku. V praksi pa največkrat naletimo na razmere, ko imamo hkrati opravka s parnim tlačnim gradientom in tudi z neenakomerno temperaturo zraka in/ali porozne plasti. V tem primeru se pojavi dodatna difuzija, tako imenovana *termična difuzija*, celo tedaj, ko je tlačni gradient na začetku enak nič. Razlog je v tem, da je termično gibanje različnih molekul v splošnem različno, in to lahko privede do spremembe porazdelitve vodne pare v zraku. Zaradi termične difuzije se tako pojavi razlika v delnih tlakih vodne pare med mesti z različnimi temperaturami. Tako nastale tlačne razlike pa povzročijo običajno difuzijo vodne pare v smeri, ki nasprotuje toku termične difuzije. Če je temperaturni gradient konstanten, se slej ko prej vzpostavi ravnovesje, ko sta oba difuzijska tokova nasprotno enaka in med toplim in hladnejšim delom zraka se vzpostavi gradient delnega tlaka pare, ki je tak, da je koncentracija vodne pare večja tam, kjer je zrak toplejši. Čeprav je termična difuzija v mešanicah plinov pomembna in jo v praksi uporabljajo za ločevanje različnih plinskih komponent, pa pri difuziji vodne pare skozi konstrukcijske sklope ne igra omembe vredne vloge in je zato v nadaljevanju ne bomo upoštevali.

Tisto, kar je pomembnejše, ko imamo hkrati difuzijo in prenos toplote, je odvisnost nasičenega parnega tlaka od temperature. Ko namreč para prodira skozi plast v smeri pojemajoče temperature, lahko pri nekaterih razmerah pride do kondenzacije pare, če delni tlak pare preseže vrednost nasičenega parnega tlaka pri temperaturi v plasti. Vlaga v konstrukcijskem sklopu v splošnem poveča toplotno prevodnost plasti, vpliva na mehanske lastnosti in obstojnost materiala in na splošen občutek ugodja v bivalnih prostorih.

Vzemimo plast z debelino L , ki ima na eni strani temperaturo T_1 , na drugi pa $T_2 < T_1$ (slika 2.15). V stacionarnem stanju je potek temperature v plasti linearen, to je

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L} x . \quad (2.9)$$



Slika 2.15: Če delni tlak pare v plasti preseže vrednost nasičenega parnega tlaka pri temperaturi v plasti, nastopi kondenzacija vodne pare

Nadalje vzemimo, da je delni tlak vodne pare na topli strani enak $\eta_1 P_p^{(n)}(T_1)$, na hladnejši strani pa $\eta_2 P_p^{(n)}(T_2) < \eta_1 P_p^{(n)}(T_1)$; η je vlažnost zraka, $P_p^{(n)}(T)$ pa nasičeni parni tlak pri temperaturi zraka T . Podobno kot temperatura tudi parni tlak v plasti pojema linearno, tako da velja:

$$P_p(x) = \eta_1 P_p^{(n)}(T_1) - \frac{\eta_1 P_p^{(n)}(T_1) - \eta_2 P_p^{(n)}(T_2)}{L} x . \quad (2.10)$$

Upoštevamo enačbo (2.2) in (2.10) prepisemo v obliki

$$P_p(x) = P_p^{(n)}(T_1) \left[\eta_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \eta_2 \frac{x}{L} e^{-\frac{M_p q_i}{R T_1} \cdot \frac{\Delta T}{T_2}} \right] , \quad (2.11)$$

kjer smo označili $T_1 - T_2 = \Delta T$. Vrednost nasičenega parnega tlaka pri temperaturi $T(x)$ v plasti lahko zapišemo v obliki:

$$P_p^{(n)}(T(x)) = P_p^{(n)}(T_1) e^{-\frac{M_p q_i}{R} \left(\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T_1} \right)} .$$

Upoštevamo (2.9), pa imamo

$$P_p^{(n)}(x) = P_p^{(n)}(T_1) e^{-\frac{M_p q_i}{R T_1} \cdot \frac{\Delta T}{T_1} \cdot \frac{x/L}{1 - \Delta T x / T_1 L}} . \quad (2.12)$$

Če enačbo (2.11) delimo z enačbo (2.12), dobimo

$$\frac{P_p(x)}{P_p^{(n)}(x)} = \left[\eta_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + \eta_2 \frac{x}{L} e^{-\frac{M_p q_i}{R T_1} \cdot \frac{\Delta T}{T_2}} \right] e^{\frac{M_p q_i}{R T_1} \frac{\Delta T}{T_1} \frac{x/L}{1 - \Delta T x / T_1 L}} .$$

V vseh tistih točkah x v plasti, kjer je koeficient $\frac{P_p(x)}{P_p^{(n)}(x)} > 1$, pride do kondenzacije pare in se tam nabira voda. Če izberemo $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $T_1 = 300$ K, $\Delta T = 10$ K ter upoštevamo vrednosti $M_p = 18$ kg, $R = 8300$ J/K in $q_i \approx 2,4 \cdot 10^6$ J/kg, gornji koeficient preseže vrednost 1 v vseh točkah v plasti za nekaj odstotkov, razen na enem in drugem robu, na katerih ima vrednost 1. Največji presežek, ki znaša dobre 4 %, doseže pri $x \approx 0,6 L$.

Kondenzacija je še izrazitejša pri večplastnih stenah z različnimi vrednostmi difuzijskih upornosti μ_i in toplotnih prepustnosti U_i , ko ustrezne tlačne in temperaturne padce v posamezni plasti izračunamo s pomočjo enačb $\Delta P_{pi} = j \frac{\mu_i L_i}{\delta}$ in $\Delta T_i = \frac{q}{U_i}$. S simboloma j in q smo označili gostoto difuzijskega in toplotnega toka skozi večplastno steno.

3 Površinska napetost vode in dinamika kapilarnega dviga

3.1 Površinska napetost

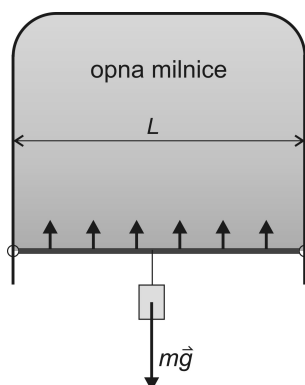
Pri mehanskih lastnostih vode izstopata predvsem dve značilnosti. Voda in na splošno vse tekočine ne prenašajo strižnih napetosti. Vsaka še tako majhna strižna napetost spravi tekočino v gibanje. Če voda miruje, tišči na stene posode vedno v pravokotni smeri. Nadalje iz vsakdanjih izkušenj vemo, da se gladina vode obnaša kakor elastična membrana. To je zato, ker vse molekule vode niso v enakovrednem položaju. Molekule v tanki plasti ob gladini so v drugačnem okolju kakor molekule v notranjosti vode. S tem so povezani *površinski* in *kapilarni pojavi*. Če je prostornina tekočine velika, je delež molekul ob površini majhen v primerjavi s celotnim številom molekul in v tem primeru so površinski pojavi sorazmerno nepomembni. So pa ti pojavi lahko odločilni pri majhnih množinah vode.

Na površini telesa imajo molekule sosedne enake vrste le na eni strani, kar jih razlikuje od molekul v notranjosti, ki so na vseh straneh obdane z enakimi molekulami. To pomeni, da je potencialna energija molekul v tanki površinski plasti drugačna od potencialne energije molekul v notranjosti telesa. Razlika med potencialno energijo molekul v tankih mejnih plasteh dveh sredstev, ki mejita eno na drugo, in energijo, ki bi jo te molekule imele v notranjosti enega in drugega sredstva, je *površinska energija*. Iz same definicije je očitno, da je površinska energija sorazmerna s površino mejne plasti in jo zato lahko zapišemo v obliki:

$$W_{pov} = \gamma S . \quad (3.1)$$

Koeficient γ , ki je odvisen od vrste in stanja snovi, ki mejita ena na drugo, imenujemo *površinska napetost*. Zaradi površinske napetosti, ki je pozitivna količina ($\gamma > 0$), skuša zavzeti površina kapljevine tako obliko, da je površinska energija čim manjša. Zato imajo kapljice vode ali mehurčki plina v kapljevini, če zanemarimo vpliv teže, vedno obliko krogle. Krogla ima namreč pri dani prostornini kapljevine najmanjšo površino. Prosta kapljevina v breztežnem prostoru torej zavzame obliko krogle.

Površinsko napetost lahko nazorno prikažemo z okvirjem iz žice, ki ga potopimo v milnico (slika 3.1). Milnica se napne na okvir v obliki tanke opne, tako da moramo pri računu površinske energije upoštevati dvakratno površino. Če je ena od stranic okvirja gibljiva, jo moramo v mirovanju držati z neko silo, ker bi se sicer zaradi površinske napetosti opna skrčila. Naj bo dolžina gibljive prečke in s tem



Slika 3.1: Opna milnice se obnaša kot elastična membrana, ki se upira raztezanju. Sila površinske napetosti $\gamma 2L$ uravnoveša težo uteži $m \vec{g}$.

širina opne enaka L , njena dolžina pa x , tako da je površinska energija enaka

$$W_{pov} = \gamma S = \gamma 2 (L x) .$$

Vzemimo, da gibljivo prečko z zunanjo silo F vlečemo v taki smeri, da se površina opne večja in da se prečka premika enakomerno. Površinska energija se pri tem večja na račun dela zunanje sile. Če se prečka premakne za dx , opravi zunanja sila delo $dA = F dx$, površinska energija pa se poveča za $dW_{pov} = \gamma 2 (L dx)$ in imamo:

$$\gamma 2 (L dx) = F dx ,$$

kar nam da

$$F = \gamma 2L .$$

Rezultat je splošen in lahko rečemo, da na vsak infinitezimalen element roba mejne plasti deluje sila, ki je pravokotna na delček roba in tangentna na mejno plast ter je usmerjena tako, da skuša zmanjšati površinsko energijo mejne plasti. Sila na enoto dolžine roba je številsko enaka površinski napetosti γ mejne plasti. Enoto za površinsko napetost lahko razberemo iz enačbe (3.1), ki nam da

$$[\gamma] = \text{J/m}^2 = \text{N/m} .$$

Iz povedanega je razumljivo, da moramo pri navajanju vrednosti za površinsko napetost povedati tudi, kateri snovi in v kakšnem stanju tvorita mejno plast. Velikokrat govorimo o površinski napetosti kapljevine brez dodatnega pojasnila, pri čemer imamo v mislih vedno površinsko napetost med kapljevino in njeno paro. Površinska napetost kapljev in z naraščanjem temperature pojema in je enaka nič pri kritični temperaturi, pri kateri razlika med kapljevino in njeno paro izgine.

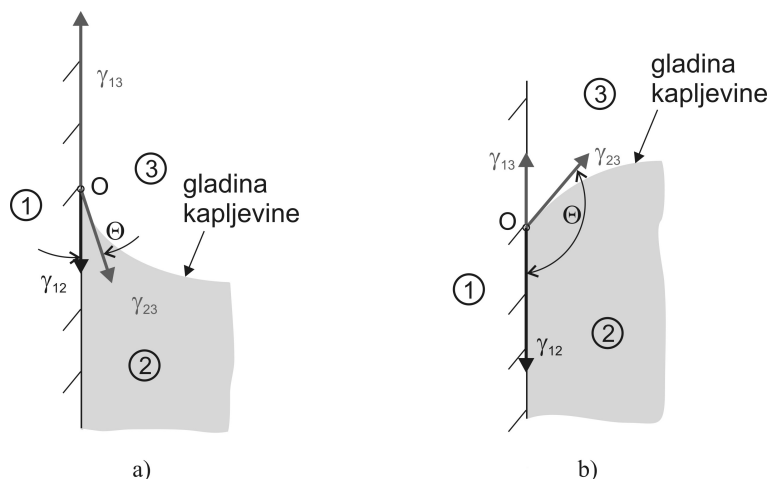
Površinska napetost je tudi na mejni površini med trdnimi telesi in okoliško snovjo, vendar je v tem primeru vpliv površinske napetosti na obliko teles zaradi šibkih sil zanemarljiv.

Površinska napetost je posledica sil med molekulami, ki hkrati določajo tudi temperaturo vrelišča snovi. Zato je razumljivo, da je v splošnem površinska napetost snovi z visokim vreliščem večja kakor

Preglednica 3.1: Površinska napetost med kapljevino in zrakom

Kapljevina	γ [N/m]
voda (20 °C)	0,073
etil eter (20 °C)	0,017
benzen (20 °C)	0,029
živo srebro (20 °C)	0,48
zlato (1130 °C)	1,1

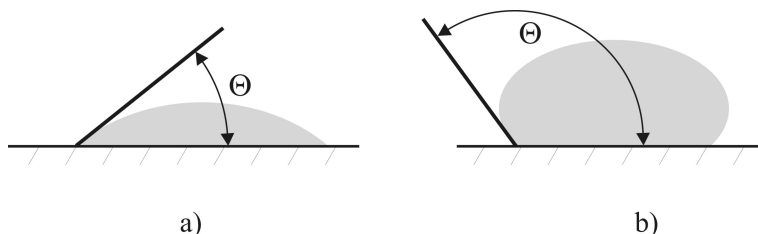
pri tistih z nizkim vreliščem. Kovine, ki imajo visoko temperaturo vrelišča, imajo veliko površinsko napetost ($\gamma > 1$ N/m). Živo srebro, ki ima vrelišče pri 357 °C, ima površinsko napetost 0,485 N/m, voda z vreliščem 100 °C pri normalnem tlaku pa $\gamma = 0,073$ N/m.



Slika 3.2: Mejni kot na stiku med kapljevino in steno posode.

Če imamo kapljevino v posodi, se ob steni na robu gladine stikajo tri snovi (slika 3.2): stena posode (snov 1), kapljevina (snov 2) in zrak ter para kapljevine (snov 3). Ob takem stiku lahko opazimo kapilarne pojave. Na rob gladine ob steni (točka O na sliki 3.2), vzdolž katerega se stikajo vse tri snovi, delujejo tri različne površinske napetosti. Vsaka od njih deluje v tangentsni smeri vzdolž mejnih površin, kakor kaže slika. Kot θ , ki ga tangenta na gladino kapljevine oklepa s steno posode, ki meji s kapljevino, imenujemo *mejni kot*. Gladina kapljevine se ob steni zaviha tako, da je rezultanta vseh sil zaradi površinskih napetosti vzdolž stene enaka nič. Komponento v pravokotni smeri uravnoveša sila stene. Mejni kot je odvisen le od površinskih napetosti, nič pa od oblike posode. Če je rob kapljevine ob steni zavihan navzgor (slika 3.2a), pravimo, da kapljevina *moči steno*. V nasprotnem primeru (slika 3.2b), ko je rob kapljevine zavihan navzdol, pa kapljevina *ne moči stene*. Če damo kapljico na vodoravno podlago, ki je iz snovi, ki jo kapljevina moči, se kapljica delno razleze po podlagi (slika 3.3a). To opazimo pri kapljici vode na čisti vodoravni stekleni podlagi. Če pa damo kapljico živega srebra na vodoravno stekleno podlago ali

kapljico vode na vodoravno ploščo parafina, se kapljice ob stiku s podlago nekako skrčijo, tako da se stična površina zmanjša (slika 3.3b). Mejni kot na meji med živim srebrom in steklom je 150° , na meji med vodo in parafinom pa 105° .



Slika 3.3: Kapljevina moči površino (a), kapljevina ne moči površine (b).

Kondenzacija nasičene pare v kapljevino je posledica privlačnih sil med molekulami pare. Če je para v stiku s trdno površino, delujejo na molekule pare ob površini tudi molekule površine. Lahko se zgodi, da so privlačne sile med molekulami površine in molekulami pare večje od sil med molekulami pare. V tem primeru lahko pride do kondenzacije pare na površini, tudi če je para nenasičena. Na taki površini se naredi tanek film kapljevine z debelino, ki je približno enaka dosegu privlačnih sil med molekulami kapljevine in stene ($10^{-7} - 10^{-5}$ cm). Če je para nasičena, je debelina filma večja. Za tako kapljevino rečemo, da *popolnoma moči* površino. Ogljikov tetraklorid (CCl_4) na primer popolnoma omoči veliko vrst površin, vključno s steklom. Rob kapljevine, ki popolnoma moči stene posode, preide zvezno v tanko plast kapljevine na steni. V tem primeru lahko rečemo, da je mejni kot enak nič. Kapljica kapljevine, ki popolnoma moči vodoravno podlago, se po njej popolnoma razleže. Tudi voda skoraj popolnoma omoči čisto stekleno površino in debelina nastale plasti je približno 10^{-6} cm. Če damo na tako omočeno površino dodatno kapljico vode, se ne razleže popolnoma, čeprav zavzame zelo sploščeno obliko z mejnim kotom, ki je manjši od 1° .

3.2 Kapilarne sile

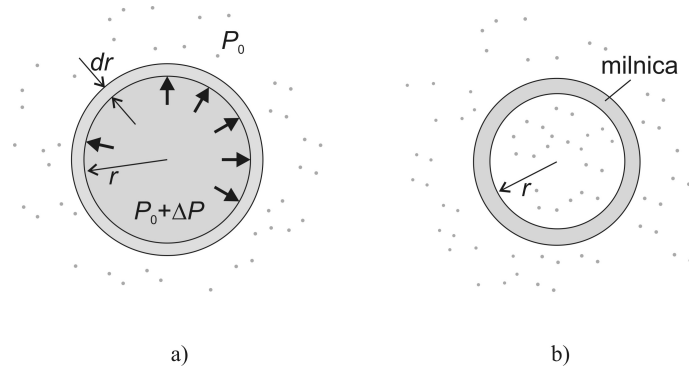
Sredstvi, ki mejita eno na drugo, imata v termodinamskem ravnovesju enak tlak. To velja le, če je mejna površina ravna (v resnici ima „mejna površina“ končno debelino, ki je reda velikosti nekaj desetink nanometra). Če mejna površina ni ravna, tlak v obeh sredstvih zaradi površinske napetosti ni enak. Vzemimo na primer kapljico vode v zraku. Sile zaradi površinske napetosti stiskajo kapljico vode tako, kakor gumijast balon stiska plin v notranjosti. To pomeni, da je tlak v kapljici večji od tlaka okoliškega zraka. Razliko tlakov ΔP lahko preprosto izračunamo.

Vzemimo, da kapljici v obliki kroglice s polmerom r (slika 3.4a), ki je v termodinamskem ravnovesju z okoliškim zrakom, povečamo polmer na $r + dr$, tako da ji nekako dodamo primerno množino vode. Pri tem se kapljici poveča površina za $dS = 8\pi r dr$ in s tem tudi površinska energija $dW_{pov} = \gamma dS$. Povečanje površinske energije gre na račun dela tlačnih sil, ki je enako $dA = \Delta P dV = \Delta P 4\pi r^2 dr$. Tako imamo

$$\gamma \cdot 8\pi r dr = \Delta P 4\pi r^2 dr$$

in

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r} .$$



Slika 3.4: (a) Tlak v kapljici je večji od okoliškega tlaka (P_0) zaradi površinske napetosti. (b) Podobno velja za milni mehurček, le da je v tem primeru tlačna razlika dvakrat večja, ker ima milnična opna dve površini.

Enak rezultat velja tudi za zračni mehurček v kapljevini. Večji tlak je vedno na vbočeni strani mejne površine, ki ločuje obe sredstvi. Ko gre $r \rightarrow \infty$, gre $\Delta P \rightarrow 0$, v skladu s tem, kar smo povedali zgoraj.

Podoben račun bi lahko naredili tudi za milni mehurček (slika 3.4b). Razlika je le v tem, da moramo pri opni iz milnice upoštevati, da je v resnici tanka krogelna lupina z dvema površinama, ki sta približno enaki. Rezultat je torej za faktor 2 večji kakor pri kapljici in sledi

$$\Delta P = \frac{4\gamma'}{r} .$$

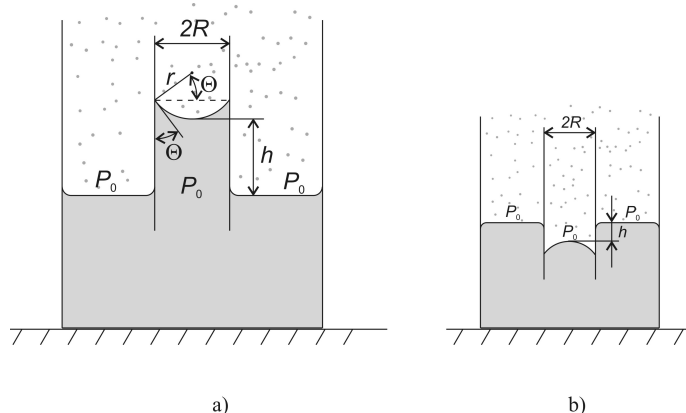
kjer smo površinsko napetost milnice označili z γ' .

Kot naslednji primer kapilarnih sil, katerih izvor so sile med molekulami, si oglejmo tako imenovani *kapilarni dvig* (ali spust) kapljevine v tanki kapilari, katere spodnji konec je potopljen v kapljevino (slika 3.5a). Če je mejni kot θ oster ($\theta < \pi/2$), je gladina kapljevine v kapilari vbočena navzdol, zato je tlak v kapljevini tik pod gladino za Δp manjši od zračnega tlaka v kapilari tik nad gladino. Po drugi strani pa je tlak v kapljevini tik pod gladino v kapilari za $\rho g h$ manjši od tlaka v posodi tik pod gladino, ki je obenem enak zračnemu tlaku (za gladino kapljevine v posodi vzamemo, da je ravna). Tako imamo

$$\Delta P = \rho g h , \quad (3.2)$$

kjer smo s h označili višino stolpca kapljevine v kapilari glede na gladino kapljevine v posodi, z ρ pa gostoto kapljevine. Če vzamemo, da ima gladina kapljevine v kapilari obliko krogelne kapice (slika 3.5a) s polmerom krogle $r = R/\cos\theta$, pri čemer je R polmer kapilare, sledi

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r} = \frac{2\gamma \cos\theta}{R} . \quad (3.3)$$



Slika 3.5: (a) Kapilarni dvig, (b) kapilarni spust. Tlak P_0 je zračni tlak ali nasičeni parni tlak pri temperaturi kapljevine.

Upoštevamo enačbo (3.2), pa dobimo za višino kapilarnega dviga h rezultat

$$h = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{2 \gamma \cos \theta}{\rho g R} . \quad (3.4)$$

Za kapljevino, ki ne moči stene kapilare, je $\theta > \pi/2$, in gornja enačba pove, za koliko je gladina kapljevine v kapilari nižja od gladine kapljevine v posodi. Tedaj govorimo o *kapilarnem spustu*, ki ga opazimo pri živem srebru in stekleni kapilari.

Primer 3.1: Določi višino stolpca vode v stekleni kapilari s polmerom $R = 0,5 \text{ mm}$!

Rešitev: Če vzamemo za površinsko napetost vode $\gamma = 0,073 \text{ N/m}$ in vzamemo, da je $\theta \approx 0^\circ$, sledi

$$h = \frac{2 \gamma}{\rho g R} = \frac{2 \cdot 0,073 \text{ N/m}}{10^{-3} \text{ kg m}^{-3} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 29 \text{ mm} .$$

Podobno vlogo kot kapilare igrajo pore v betonski steni. Če je taka stena na dnu v stiku z vodo, bo voda zaradi kapilarnih sil lezla po steni navzgor. Premer por v betonu je lahko od nekaj desetink nanometra do 1 mm. Če vzamemo za polmer pore $R = 5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, dobimo za kapilarni dvig $h \approx 3 \text{ m}$. To nam pove, da je kapilarni dvig vode v konstrukcijskih sklopih pomemben. Če so pore z različnimi polmeri povezane med sabo, bodo tanjše pore srkale vlago iz večjih por, dokler se ne vzpostavi ravnovesje tlakov tudi v manjših porah. Če vlažen porozen material staknemo s suhim poroznim materialom, bo suhi srkal vlago iz vlažnega, dokler se med njima ne vzpostavi ravnovesje kapilarnih tlakov. Model por kot množica kapilarnih cevok različnih polmerov je seveda le grob približek dejanske konfiguracije por v poroznih vrstah materiala.

Površinska napetost vpliva tudi na ravnovesje med kapljevino in njeno paro. Z drugimi besedami to pomeni, da nasičeni parni tlak ni odvisen samo od temperature, ampak tudi od oblike mejne površine med kapljevino in njeno paro. Odvisnost pričakovano ni posebej izrazita in je pomembna le, kadar je ukrivljenost gladine velika. Da bomo ugotovili odvisnost nasičenega parnega tlaka od ukrivljenosti

gladine, si bomo pomagali s kapilarnim dvigom. Vzemimo, da je nad gladino kapljevine v kapilari in tudi v posodi (slika 3.5a) samo nasičena para. Ker tlak pojema z višino, je očitno, da je tlak nasičene pare nad gladino v kapilari pri kapilarnem dvigu za $\rho_p g h$ manjši, pri kapilarnem spustu pa ravno za toliko večji kakor nasičeni parni tlak nad ravno gladino v posodi (ρ_p je gostota nasičene pare).

Zmanjšanje parnega tlaka ob vbočeni gladini kapljevine je vzrok za nastanek *kapilarne kondenzacije*. Če je nasičena para v stiku s poroznim telesom, se v porah kondenzira para. Kot smo že omenili, pore delujejo kot tanke kapilare, v katerih je gladina kapljevine, ki moči stene pore, vbočena. Ob vbočeni gladini pa je nasičeni parni tlak zmanjšan, kar lahko povzroči kondenzacijo pare. Če je gladina kapljevine izbočena, se tlak nasičene pare poveča. Iz enačbe (3.3) sledi $\rho_k g h = \frac{2\gamma}{r}$, pri čemer je ρ_k gostota kapljevine. Po drugi strani pa vemo, da se pri kapilarnem spustu nasičeni parni tlak poveča za $\rho_p g h = (\rho_p/\rho_k) \rho_k g h = (\rho_p/\rho_k) \frac{2\gamma}{r}$. Za ravno toliko se poveča tudi nasičeni parni tlak ob površini kapljice s polmerom r . Nasičeni parni tlak ob površini kapljice je torej tem večji, čim manjša je kapljica. Vzemimo vodno paro, ki vsebuje tudi kapljice vode z različnimi polmeri. Tedaj se lahko zgodi, da je para prenasičena glede na večje kapljice in nenasičena glede na manjše. Manjše kapljice bodo zato izhlapevale, na večjih pa se bo para kondenzirala. Lahko rečemo, da večje kapljice požirajo manjše.

3.3 Viskoznost tekočin in dinamika kapilarnega dviga

S stališča gradbene stroke so kapilarni pojavi pomembni predvsem zato, ker omogočajo prodiranje vode skozi razpoke in pore v različnih konstrukcijskih elementih. Prisotnost vode in pare v konstrukcijskih elementih vpliva na njihove mehanske in tudi na toplotne lastnosti. V tem razdelku bomo določili hitrost dviganja kapljevinskega stolpca v navpični kapilari. V ta namen moramo najprej povedati nekaj o viskoznosti tekočin (kapljev in plinov).

Pri pretakanju tekočin se različni tekočinski delčki v splošnem gibljejo z različnimi hitrostmi. Tako stanje ni ravnovesno stanje tekočine, ker se med posameznimi deli tekočine, ki drsijo eden glede na drugega, pojavi *notranje trenje* ali *viskoznost*. Zaradi viskoznosti tekočine se hitrosti posameznih tekočinskih delčkov slej ko prej izenačijo. Podobno kakor se toplota prenaša s termičnim gibanjem molekul od mest z višjo temperaturo k mestom z nižjo, se pri viskoznih tekočinah prenaša gibalna količina od mest, na katerih je hitrost tekočine velika, k mestom, na katerih je manjša.

Difuzija, prevajanje toplote in viskoznost so sorodni pojavi. V vseh treh primerih imamo opraviti s procesi, pri katerih se izenačujejo neke lastnosti snovi: enkrat koncentracije raztopine, drugič temperature snovi in v tretjem primeru hitrosti različnih tekočinskih delčkov. Osnovni mehanizem prenosa ali *transporta* ustrezne količine je v vseh naštetih primerih termično gibanje in trki med molekulami. Pri difuziji gre za transport delcev snovi, ki sestavljajo raztopino, pri prevajanju toplote se prenaša energija in pri viskoznosti govorimo o transportu gibalne količine. Vse te procese imenujemo *transportni pojavi*.

Vzemimo, da je smer hitrosti vseh delov tekočine enaka, hitrosti se razlikujejo le po velikosti. Velikost se spreminja le v smeri pravokotno na tok tekočine. Koordinatno os x usmerimo pravokotno na tok tako, da je $v = v(x)$. Po analogiji z gostoto toplotnega ali difuzijskega toka definiramo *gostoto toka gibalne količine* Π kot gibalno količino, ki se prenese v časovni enoti v smeri pozitivne osi x skozi enoto ploskve, ki je pravokotna na os x . Skladno z omenjeno analogijo zapišemo (v plinih moramo zahtevati,

da je Knudsenovo število dovolj majhno, $K_n \ll 1$)

$$\Pi = -\eta \frac{dv}{dx} . \quad (3.5)$$

Sorazmernostni koeficient η imenujemo *koeficient viskoznosti* ali na kratko *viskoznost* tekočine. Enoto zanjo razberemo iz gornje enačbe,

$$[\eta] = \frac{[\Pi]}{[dv/dx]} = \frac{\text{kg m s}^{-1}/\text{m}^2\text{s}}{\text{s}^{-1}} = \text{kg/ms} .$$

Viskoznost določa, kako hitro se gibalna količina prenaša od enega mesta v toku k drugemu. Ker pa je hitrost delčka tekočine enaka kvocientu gibalne količine delčka z maso delčka, sledi, da se hitrost v tekočini izenačuje tem hitreje, čim večji je kvociient η/ρ , kjer je ρ gostota tekočine. Zato je v navadi, da kvociient

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

imenujemo *kinematična viskoznost*, η pa *dinamična viskoznost*. Iz same definicije kinematične viskoznosti je razvidno, da je enota za kinematično viskoznost enaka enoti za difuzijski koeficient D in enoti termične difuzivnosti χ :

$$[\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} .$$

Kinematična viskoznost tekočine je neke vrste difuzijski koeficient za hitrost tekočine.

Preglednica 3.2: Viskoznost nekaterih kapljev in plinov pri 20 °C

snov	η (kg/ms)	ν (m ² /s) · 10 ⁴
vodik	$0,88 \cdot 10^{-5}$	0,95
zrak	$1,8 \cdot 10^{-5}$	0,150
benzen	0,065	0,72
voda	0,0010	0,010
živo srebro	0,00155	0,0014
glicerin	1,50	12,0

Pri mehaniki smo se naučili, da je sprememba gibalne količine telesa v časovni enoti enaka rezultanti zunanjih sil, ki delujejo nanj. Gostota toka gibalne količine Π je torej sila na enoto ploskve, s katero tekočina deluje nanjo. Poskusimo to pojasniti še z naslednjima dvema primeroma. Najprej si zamislimo dve ravni vzporedni plošči, med katerima je kapljevina z viskoznostjo η . Naj bo v hitrost zgornje plošče glede na spodnjo, h pa razmik med njima (slika 3.6). Hitrost kapljevine v tanki plasti ob eni ali drugi plošči je zaradi privlačnih sil med molekulami plošč in molekulami kapljevine enaka hitrosti plošče. Tanka plast kapljevine tik ob plošči se „prilepi“ nanjo. Viskozni sili, ki delujeta na enoto površine ene in druge plošče, sta nasprotno enaki in se upirata njenemu relativnemu gibanju. Če vzamemo, da spodnja

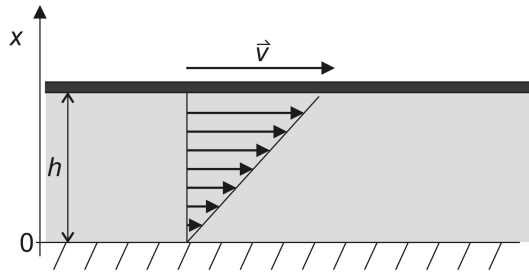
plošča miruje in če je hitrost v stalna, sledi, da je $\Pi = \text{const}$ in enačba (3.5) nam pove, da velja

$$\frac{dv}{dx} = \text{const} \rightarrow v(x) = \frac{v}{h} x ,$$

kjer je koordinatna os usmerjena pravokotno na plošči s koordinatnim izhodiščem na mirujoči plošči. Silo na enoto površine ene ali druge plošče zapišemo v obliki

$$\frac{F}{S} = |\Pi| = \eta \frac{v}{h} .$$

Sila je tem večja, čim večja je relativna hitrost plošč in čim manjši je razmik med njima.



Slika 3.6: Tanka plast kapljevine z viskoznostjo η zapolnjuje prostor med vodoravno podlago in vzporedno ploščo, ki se giblje s hitrostjo v glede na podlago

Kot naslednji primer si oglejmo tok viskozne tekočine po okrogli cevi s polmerom R in tlačno razliko $\Delta P = P_1 - P_2$ med enim in drugim koncem odseka cevi z dolžino l . Koordinatna os x sovpada s simetrijsko osjo cevi. Velikost hitrosti je stalna vzdolž osi in se spreminja le v radialni smeri, tako da velja $v = v(r)$. Hitrost je največja na osi in je enaka nič v tanki plasti tekočine tik ob plašču cevi, za katero smo vzeli da miruje. Gostota toka gibalne količine v radialni smeri je torej enaka

$$\Pi = -\eta \frac{dv}{dr} . \quad (3.6)$$

Določimo tok gibalne količine skozi plašč valja s polmerom $r < R$, ki ga tvori tekočina v tem delu cevi. Iz enačbe (3.6) sledi

$$2 \pi r l \Pi = -2 \pi r l \eta \frac{dv}{dr} .$$

To je hkrati sila viskoznega trenja, s katero okoliška tekočina nasprotuje gibanju tekočine v valju s polmerom r . To silo pri stacionarnem toku uravnoveša tlačna sila $\pi r^2 \Delta P$, ki je posledica razlike tlakov med enim in drugim koncem obravnavanega odseka cevi. Tako imamo

$$\pi r^2 \Delta P = -2 \pi r l \eta \frac{dv}{dr}$$

in

$$\frac{dv}{dr} = -\Delta P \frac{r}{2 \eta l} .$$

Zadnjo enačbo prepišemo v obliki

$$\frac{dv}{dr} + \frac{\Delta P}{4\eta l} \frac{dr^2}{dr} \equiv \frac{d}{dr} \left(v + \frac{\Delta P}{4\eta l} r^2 \right) = 0 \rightarrow v + \frac{\Delta P}{4\eta l} r^2 = \text{const} .$$

Integracijsko konstanto izberemo tako, da velja robni pogoj $v(r = R) = 0$, kar nam da

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta l} (R^2 - r^2) .$$

Masni tok kapljavine skozi cev Φ_m je tako enak (ρ je gostota kapljavine)

$$d\Phi_m = \rho v 2\pi r dr$$

in

$$\Phi_m = \frac{\rho \pi \Delta P}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\rho \pi R^4}{8\eta l} \Delta P . \quad (3.7)$$

To je tako imenovana *Poiseuillova formula*.

Poiščimo zdaj hitrost dviganja vodnega stolpca v navpični kapilari, $\bar{v} = \frac{dh}{dt}$, kjer pomeni $\bar{v}$ povprečno hitrost kapljavine po celotnem preseku kapilare. Enačbo za $\bar{v}$ lahko zapišemo s pomočjo enačbe (3.7), tako da zahtevamo

$$\Phi_m \equiv \rho \pi R^2 \bar{v} = \rho \pi R^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\rho \pi R^4}{8\eta h} \Delta P .$$

Sledi

$$\frac{dh}{dt} = \frac{R^2}{8\eta h} \Delta P .$$

Tlačna razlika je sestavljena iz prispevka površinske napetosti (3.3), ki mu nasprotuje tlačna razlika zaradi sile teže (3.2). Tako dobimo *Washburnovo enačbo*:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{R^2}{8\eta h} \left(\frac{2\gamma \cos \theta}{R} - \rho g h \right) . \quad (3.8)$$

Ko kapljavina doseže največjo višino h_{max} , se stolpec ustali in velja $\frac{dh}{dt} \Big|_{h=h_{max}} = 0$ in iz enačbe (3.8) sledi že znani izraz (3.4),

$$h_{max} = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g R} .$$

Washburnovo enačbo hitro rešimo, če vpeljemo brezdimenzijsko količino $\xi = h/h_{max}$ in upoštevamo začetni pogoj $h(t = 0) = 0$. V ta namen enačbo (3.8) pomnožimo s h in delimo s h_{max}^2 ; tako dobimo

$$\xi \frac{d\xi}{dt} = \frac{2\gamma R \cos \theta}{8\eta h_{max}^2} - \frac{\rho g R^2}{8\eta h_{max}} \xi .$$

Če upoštevamo izraz za h_{max} , sledi

$$\frac{2\gamma R \cos \theta}{8\eta h_{max}^2} = \frac{\rho g R^2}{8\eta h_{max}} = \frac{\rho^2 g^2 R^3}{16\eta \gamma \cos \theta} \equiv \frac{1}{\tau_\eta} . \quad (3.9)$$

Z enačbo (3.9) smo definirali *relaksacijski čas* τ_η , ki določa časovno skalo dviganja kapljevinskega stolpca v kapilari. Za vodo ($\eta(20^\circ\text{C}) = 10^{-3} \text{ kg/ms}$, $\theta = 0$) v kapilari s polmerom $R = 0,5 \text{ mm}$ je relaksacijski čas enak $\tau_\eta(\text{H}_2\text{O}) \approx 100 \text{ ms}$. Če vpeljemo še $\tau = t/\tau_\eta$, lahko Washburnovo enačbo zapišemo v dokončni brezdimenzijski obliki kot

$$\xi \frac{d\xi}{d\tau} = 1 - \xi . \quad (3.10)$$

Rešitev te enačbe pri začetnem pogoju $\xi(\tau = 0) = 0$ dobimo preprosto z integriranjem. Enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{\xi d\xi}{1 - \xi} = d\tau ,$$

vpeljemo novo spremenljivko $x = 1 - \xi$, $d\xi = -dx$ in dobimo

$$\frac{dx}{x} - dx = -d\tau .$$

Dobljeno enačbo integriramo na obeh straneh, kar nam da

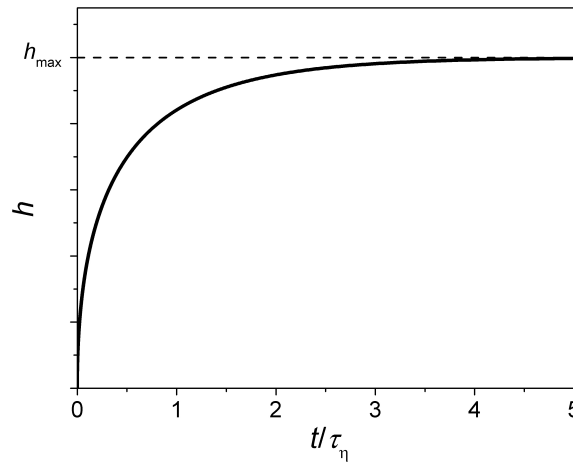
$$\ln x - x = -\tau + C ,$$

kjer je C integracijska konstanta, ki jo določimo z začetnim pogojem $x(\tau = 0) = 1$. Sledi $C = -1$ in če upoštevamo $x = 1 - \xi$, imamo

$$\ln(1 - \xi) + \xi = -\tau .$$

Rešitev (slika 3.7) v končni obliki je

$$(1 - \xi) e^\xi = e^{-\tau} . \quad (3.11)$$



Slika 3.7: Višina kapilarnega stolpca v odvisnosti od časa kot jo opisuje enačba (3.11, $\xi = h/h_{\max}$ in $\tau = t/\tau_\eta$)

Za majhne čase, $\tau \ll 1$, pričakujemo, da je tudi $\xi \ll 1$; tedaj smemo gornjo rešitev poenostaviti tako, da eksponente razvijemo v potenčno vrsto, kar nam da

$$(1 - \xi)(1 + \xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \dots) = 1 - \tau + \dots,$$

in

$$\xi^2 \approx 2\tau$$

ali

$$h(t) = \sqrt{2 h_{max}^2 \frac{t}{\tau_\eta}} = \sqrt{\frac{\gamma R \cos \theta}{2\eta}} t. \quad (3.12)$$

Poglejmo limito, ko gre $\tau \rightarrow \infty$ in hkrati $\xi \rightarrow 1$. Iz enačbe (3.11), ko na levi strani zapišemo $e^\xi \approx e$, dobimo

$$\xi = 1 - e^{-\tau-1} \approx 1 - e^{-\tau}$$

ter

$$h(t) = h_{max} \left(1 - e^{-t/\tau_\eta}\right).$$

Hitrost prodiranja kapljevine v porozno snov lahko določimo s tehtanjem vzorca. Nato s pomočjo Washburnove enačbe, če poznamo povprečno vrednost premera por $\bar{R}$, ocenimo kot θ , ki ga oklepa kapljevina s steno pore, in iz tega potem sklepamo, kako dobro kapljevina moči material.

Iz enačbe (3.12) nadalje sledi $dh/dt|_{t \rightarrow 0} \propto 1/t^{1/2}$. Hitrost dviganja stolpca je torej na začetku zelo velika, kar je seveda v nasprotju s Poiseuillovo enačbo, ki temelji na predpostavki laminarnega toka kapljevine. Enačba (3.8) v tej limiti torej ni veljavna in da smiselne rezultate le za $h \gg R$.

Primer 3.2: *Posploši enačbo (3.8) oziroma (3.10) tako, da upoštevaš tudi izgube vode zaradi izparevanja na površini porozne kapilare. Predpostavi, da je hitrost izparevanja sorazmerna s površino tistega dela kapilare, ki je v danem trenutku zapolnjen z vodo.*

Rešitev: Če označimo hitrost izparevanja na enoto površine kapilare z e_{izp} ($[e_{izp}] = \text{m/s}$), imamo

$$\rho \pi R^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\rho \pi R^4}{8 \eta h} \left(\frac{2 \gamma \cos \theta}{R} - \rho g h \right) - e_{izp} \rho 2 \pi R h$$

in

$$\frac{dh}{dt} = \frac{R^2}{8 \eta h} \left(\frac{2 \gamma \cos \theta}{R} - \rho g h \right) - \frac{2 e_{izp}}{R} h. \quad (3.13)$$

Uporabimo že znane definicije za ξ , τ , τ_η in podobno definirajmo še časovno konstanto $\tau_e = R/2e_{izp}$, ki določa hitrost izparevanja, pa imamo

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1 - \xi}{\xi} - \frac{\tau_\eta}{\tau_e} \xi. \quad (3.14)$$

Največjo višino $\tilde{h}_{max}$ ob prisotnosti izhlapevanja določimo tako, da zahtevamo $d\xi/d\tau = 0$, kar nam da

$$\tilde{h}_{max} = h_{max} \left(\frac{-1 + \sqrt{4 \frac{\tau_\eta}{\tau_e} + 1}}{2 \frac{\tau_\eta}{\tau_e}} \right). \quad (3.15)$$

Če vzamemo $\tau_\eta = \tau_e$, sledi $\tilde{h}_{max} = h_{max} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = 0,62 h_{max}$. V nasprotnem primeru, ko je $\tau_e \gg \tau_\eta$ in velja $\tau_\eta/\tau_e \ll 1$, sledi $\sqrt{1 + 4 \frac{\tau_\eta}{\tau_e}} = 1 + 2 \frac{\tau_\eta}{\tau_e} + \dots$, tako da imamo $\tilde{h}_{max} = h_{max}$.

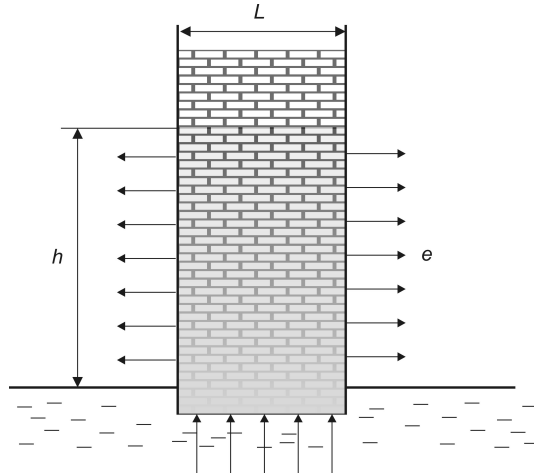
Formalno enaka enačba kakor (3.14) velja tudi za prodiranje vlage v porozni navpični steni s širino L , ki je na spodnjem koncu v stiku z razmočeno zemljino, tako kakor kaže slika 3.8. Časovni konstanti v tem primeru običajno zapišemo v naslednji obliki¹:

$$\frac{1}{\tau_\eta} = \frac{1}{\tau_\eta^{(0)}} \frac{\left(h_{max}^{(0)} \right)^2}{f^2 h_{max}^2}; \quad (3.16)$$

$h_{max}^{(0)} = 1 \text{ m}$, $0,7 \frac{V_{por}}{V} \leq f \leq \frac{V_{por}}{V}$, kjer V_{por} pomeni prostornino por v steni s prostornino V . Za večino vrst materiala velja, da je $V_{por}/V \approx 0,25$. Produkt $f L h_{max}$ je torej prostornina vode na enoto dolžine razmočenega dela stene. Nadalje velja, na primer za apnenec, $0,125 \cdot 10^{-6} \text{ min}^{-1} \leq (1/\tau_\eta^{(0)}) \leq 1,125 \cdot 10^{-6} \text{ min}^{-1}$. Časovna konstanta, ki določa hitrost izparevanja, je

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_e^{(0)}} \cdot \frac{L_0}{f L}, \quad (3.17)$$

kjer je $L_0 = 10 \text{ cm}$, in $1/\tau_e^{(0)} \approx 10^{-5} / \text{min}$.



Slika 3.8: Porozna navpična stena s širino L je v stiku z razmočeno zemljino. Izgube zaradi izhlapevanja vlage v steni določa hitrost izparevanja e_{izp} , ki pove, koliko m^3/s vode izgubi vsak m^2 površine vlažne stene ($[e_{izp}] = \frac{\text{m}^3 \text{ s}^{-1}}{\text{m}^2} = \text{m/s}$). Višina h predstavlja višino tistega dela stene, ki vsebuje vodo.

Enačbo (3.14) najprej rešimo za primer, ko je $\tau_\eta/\tau_e \gg 1$. Enačbo prepišemo v obliki

$$\xi \frac{d\xi}{d\tau} = 1 - \xi \left(\frac{\tau_\eta}{\tau_e} \xi + 1 \right)$$

¹C.Hall, W.D. Hoff, Rising damp: capillary dynamics in walls, *Proc. R. Soc. A*, **463**, 1871-1884 (2007).

in privzamemo, da je $\frac{\tau_\eta}{\tau_e} \xi \gg 1$ za skoraj vse vrednosti $\xi \neq 0$, tako da imamo

$$\xi \frac{d\xi}{d\tau} = 1 - \frac{\tau_\eta}{\tau_e} \xi^2 . \quad (3.18)$$

Če primerjamo to enačbo z enačbo (3.13), opazimo, da enačba (3.18) opisuje kapilarni dvig brez upoštevanja sile teže. Enačba (3.18) namreč sledi iz enačbe (3.13), če vzamemo $g = 0$. Rešitev enačbe (3.18) pri začetnem pogoju $\xi(\tau = 0) = 0$ je

$$\xi^2(\tau) = \frac{\tau_e}{\tau_\eta} \left(1 - e^{-2(\frac{\tau_\eta}{\tau_e})\tau} \right)$$

ali

$$h^2(t) = \frac{\tau_e}{\tau_\eta} \cdot h_{max}^2 \left(1 - e^{-2t/\tau_e} \right) \quad (3.19)$$

in

$$\tilde{h}_{max} = \sqrt{\frac{\tau_e}{\tau_\eta}} \cdot h_{max} .$$

Enak rezultat dobimo tudi z enačbo (3.15), ko zahtevamo $\frac{\tau_\eta}{\tau_e} \gg 1$. Če upoštevamo enačbi (3.16) in (3.17), sledi

$$\tilde{h}_{max} = \sqrt{\frac{L \tau_e^{(0)}}{L_0 f \tau_\eta^{(0)}}} h_{max}^{(0)} .$$

Izberimo $L = 15$ cm, $\tau_e^{(0)} = 10^5$ min, $f = 0,2$ in $1/\tau_\eta^{(0)} = 0,5 \cdot 10^{-6}$ min⁻¹, pa imamo

$$\tilde{h}_{max} = \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}}{0,2}} \cdot 1 \text{ m} \approx 0,61 \text{ m} .$$

V ravnovesnem stanju je množina vode, ki je v 1 m dolgem delu razmočene stene, enaka

$$\tilde{V} = f L \tilde{h}_{max} \cdot 1 \text{ m} = 0,2 \cdot 0,15 \text{ m} \cdot 0,61 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} \approx 18 \text{ litrov} .$$

Iz enačbe (3.18) izračunajmo še množino vode, ki izpari v časovni enoti na površini tega dela stene v stacionarnem stanju. Enačba

$$\frac{d(f L h)}{dt} = \frac{h_{max}^2}{\tau_\eta} \frac{f L}{h} - \frac{L_0}{\tau_e^{(0)}} h$$

opisuje spreminjanje množine vode v steni. Prvi člen na desni strani predstavlja dotok vode skozi spodnjo površino stene, drugi člen pa izgube zaradi izparevanja na levi in desni površini stene. V ravnovesju ravno toliko vode v časovni enoti vstopi skozi spodnjo površino, kakor je ob straneh izpari. Množina vode, ki se v časovni enoti pretoči skozi 1 m dolg segment stene v ravnovesnem stanju, je torej enaka

$$1 \text{ m} \cdot \frac{L_0}{\tau_e^{(0)}} \tilde{h}_{max} = 1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,61 \text{ m} \cdot \frac{10^{-5}}{\text{min}} \approx 0,88 \text{ liter/dan}$$

ali približno 320 litrov na leto na vsak dolžinski meter dolžine stene. Ker je v vlažnem delu stene v ravnovesju 18 litrov vode, to pomeni, da se voda v celoti zamenja v času

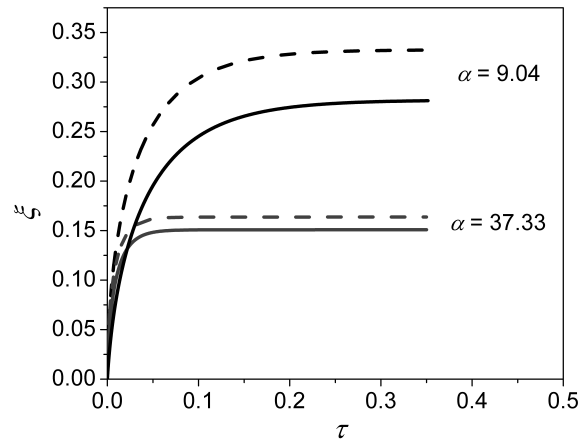
$$t_0 = \frac{18 \text{ liter}}{0,88 \text{ liter/dan}} \approx 20 \text{ dni} .$$

Rešitev (3.19) lahko prepišemo v priročnejši obliki kot

$$h^2 = \tilde{h}_{max}^2 \left(1 - e^{-2t/\tau_e}\right) . \quad (3.20)$$

Čas, v katerem nivo vlage doseže višino $h = 0,95 \tilde{h}_{max}$, določimo iz enačbe (3.20). Sledi

$$t_{0,95} = -\frac{1}{2} \ln(0,0975) \cdot \tau_e \approx 1,164 \cdot \frac{f L}{L_0} \tau_e^{(0)} = 1,164 \cdot 0,2 \cdot 1,5 \cdot 10^5 \text{ min} \approx 24 \text{ dni} .$$



Slika 3.9: Rešitve enačb (3.22, polna črta) in (3.23, črtkano) v grafični obliki

Če označimo $\tau_\eta/\tau_e = \alpha$, lahko zapišemo enačbo (3.14) kot

$$\xi \frac{d\xi}{d\tau} = -\alpha \xi^2 - \xi + 1 .$$

Splošna rešitev pri začetnem pogoju $\xi(\tau = 0) = 0$ je

$$-2\alpha\tau = \ln(1 - \xi - \alpha\xi^2) + \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha}} \ln \left| \frac{2\alpha\xi + 1 + \sqrt{1+4\alpha}}{2\alpha\xi + 1 - \sqrt{1+4\alpha}} \right| + C , \quad (3.21)$$

kjer je C integracijska konstanta, ki jo določimo z začetnim pogojem,

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha}} \ln \left(\frac{\sqrt{1+4\alpha} - 1}{\sqrt{1+4\alpha} + 1} \right) .$$

Rešitev (3.21) lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$-2\alpha\tau = \ln(1 - \xi - \alpha\xi^2) + \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha}} \ln \left| \frac{2\alpha\xi(1 - \sqrt{1+4\alpha}) - 4\alpha}{2\alpha\xi(1 + \sqrt{1+4\alpha}) - 4\alpha} \right| . \quad (3.22)$$

Če je $\alpha \gg 1$, dobimo ponovno rešitev enačbe (3.18), ki jo lahko zapišemo tudi v obliki,

$$-2\alpha\tau = \ln(1 - \alpha\xi^2) . \quad (3.23)$$

Rešitve enačb (3.22) in (3.23) so prikazane v grafični obliki na sliki 3.9 za naslednje vrednosti parametrov: a) $1/\tau_e = 4,7 \cdot 10^{-6}/\text{min}$, $1/\tau_\eta = 0,125 \cdot 10^{-6}/\text{min}$ ($\alpha = 37,33$) in $h_{max} = 10$ m, b) $1/\tau_e = 1,13 \cdot 10^{-6}/\text{min}$ in podobno kot v prejšnjem primeru $1/\tau_\eta = 0,125 \cdot 10^{-6}/\text{min}$ ($\alpha = 9,04$) ter $h_{max} = 10$ m ($\xi = h/h_{max}$).

4 Zvočno valovanje v tekočinah

4.1 Valovna enačba in hitrost zvoka

Podobno kakor na napeti vrvi ali prožni vzmeti se valovanje lahko razširja po vsakem elastičnem sredstvu. Pri tem posamezni deli sredstva ali snovi nihajo okrog ravnovesnih leg. Pri opisu valovanja bomo zanemarili molekularno zgradbo snovi in bomo vzeli, da imamo opravka z zveznim sredstvom. V plinih je ta predpostavka upravičena le, če je valovna dolžina velika v primerjavi s povprečno prosto potjo molekul. Ko torej rečemo, da posamezni deli sredstva nihajo okrog ravnovesnih leg, imamo v mislih delčke snovi, katerih linearna razsežnost je velika v primerjavi s povprečno prosto potjo molekul, a majhna v primerjavi z valovno dolžino.

Ker tekočine ne prenašajo strižnih napetosti, se v njih razširja le *longitudinalno valovanje*, pri katerem deli snovi nihajo v smeri razširjanja valovanja. Tako valovanje imenujemo *zvok*. Na vsakem mestu v snovi tako valovanje ustvarja *zgoščine* in *razredčine*. Z zgoščinami in razredčinami so povezane spremembe tlaka, ki jih lahko določimo s pomočjo enačbe stanja $P = P(T, \rho)$, kjer je ρ gostota, T pa absolutna temperatura tekočine na danem mestu. Razširjanje valovanja po tekočini lahko tako opišemo na tri načine: kot nihanje delčkov snovi okrog ravnovesnih leg, kot nihanje gostote ali kot nihanje tlaka v tekočini. Odmik tekočinskega delčka na mestu $\vec{r}$ in v trenutku t glede na ravnovesno lego bomo označili z $\vec{u}(\vec{r}, t)$, pri čemer kaže vektor odmika $\vec{u}$ v smeri razširjanja valovanja. Ker so odmiki različnih delov tekočine različni, se zaradi tega spreminja gostota tekočine, ki jo zapišemo v obliki

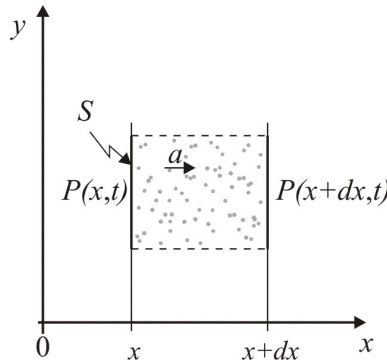
$$\rho(\vec{r}, t) = \rho + \tilde{\rho}(\vec{r}, t) ,$$

kjer je $\rho = \text{const}$ ravnovesna gostota. Pri nadaljnji obravnavi bomo vzeli, da so spremembe gostote $\tilde{\rho}$, ki jih povzroča valovanje, majhne, tako da velja $\tilde{\rho} \ll \rho$. Kakor smo že omenili, spreminjanje gostote povzroči spreminjanje tlaka, ki ga zapišemo podobno kot gostoto, to je,

$$P(\vec{r}, t) = P + \tilde{P}(\vec{r}, t) ,$$

pri pogoju $\tilde{P} \ll P = \text{const}$.

Gibanje tekočinskih delcev okrog ravnovesnih leg je posledica tlačnih razlik v tekočini. Da bo račun vsaj na začetku enostavnejši, bomo privzeli, da se valovanje razširja v smeri osi x , tako da velja $u = u(x, t)$, $\tilde{P} = \tilde{P}(x, t)$ in $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(x, t)$. Izberimo tanko plast tekočine z debelino dx in prečnim presekom S , ki leži med x in $x + dx$ (slika 4.1). Masa tekočine v izbrani plasti je, če zanemarimo



Slika 4.1: Izpeljava valovne enačbe

spremembo gostote $\tilde{\rho}$, enaka $\rho S dx$ in se giblje s pospeškom¹ $a \approx \partial v / \partial t$. Nadalje iz slike 4.1 razberemo, da je sila, ki deluje na izbrano plast tekočine enaka,

$$S(P(x, t) - P(x + dx, t)) = S \left(\tilde{P}(x, t) - \tilde{P}(x + dx, t) \right) = -S \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} dx .$$

2. Newtonov zakon zapišemo kot

$$\rho S dx \frac{\partial v}{\partial t} = -S \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} dx , \quad (4.1)$$

kjer je $v(x, t)$ hitrost tekočinskega delčka na mestu x in v trenutku t . Enačbo na obeh straneh delimo s $S dx$ in imamo, če upoštevamo $v = \partial u / \partial t$,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} . \quad (4.2)$$

V nadaljnjem bomo zanemarili viskoznost in toplotno prevodnost tekočine. Take tekočine imenujemo *idealne*. V tem primeru velja, da sta stiskanje in razpenjanje tekočine, ki ju povzroča valovanje, *adiabatno*. Iz definicije adiabatne stisljivosti tekočine

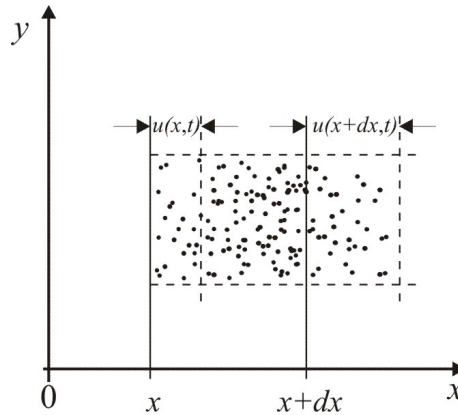
$$\chi_S = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \quad (4.3)$$

sledi $dP \equiv \tilde{P} = - \frac{1}{\chi_S} \frac{dV}{V}$, kjer je dV/V relativna sprememba ravnovesne prostornine $S dx$ izbranega dela tekočinske plasti, ki jo povzroči valovanje (subskript S v enačbi (4.3) označuje entropijo). Iz slike 4.2 je razvidno, da velja

$$\frac{dV}{V} \equiv \frac{S[u(x + dx, t) - u(x, t) + dx] - S dx}{S dx} = \frac{S \left[\left(u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \dots \right) - u(x, t) \right]}{S dx} = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Tako imamo

¹ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}(\vec{r} + \vec{v} dt, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$. Za oceno velikosti enega in drugega člena zapišimo $\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \approx \frac{v}{t_0}$, kjer je t_0 nihajni čas, ter $|(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}| \approx \frac{v^2}{\lambda}$, kjer je $\lambda = c t_0$ valovna dolžina, c pa hitrost razširjanja valovanja. Tako imamo $|(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}| \approx \frac{v}{t_0} \cdot \frac{v}{c} \ll \frac{v}{t_0}$, ker je $v \ll c$. Torej smemo zapisati $\vec{a} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.



Slika 4.2: Zaradi zvočnega valovanja se prostornina $S dx$ izbrane množine tekočine spremeni v $S[dx - u(x, t) + u(x + dx, t)]$

$$\tilde{P} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial u}{\partial x} . \quad (4.4)$$

Rezultat vstavimo v enačbo (4.2), kar nam da tako imenovano *valovno enačbo*, ki popisuje razširjanje zvočnega valovanja v tekočini vzdolž izbrane koordinatne osi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \quad (4.5)$$

s c smo označili hitrost razširjanja zvočnega valovanja v tekočini in je enaka

$$c^2 = \frac{1}{\rho \chi_S} . \quad (4.6)$$

Zaradi valovanja se ravnovesna prostornina izbrane plasti $S dx$ spreminja tako, kakor opisuje izraz $S dx + S dx (\partial u / \partial x)$, in posledično se spremeni tudi gostota tekočine od ravnovesne vrednosti ρ na vrednost $\rho + \tilde{\rho}$. Ker pa se masa tekočine v izbrani plasti ne spremeni, mora veljati

$$\rho S dx = (\rho + \tilde{\rho}) S dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

in

$$0 = \tilde{\rho} + (\rho + \tilde{\rho}) \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Če zanemarimo člen $\tilde{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}$, ki je majhen v primerjavi s preostalima členoma, imamo

$$\tilde{\rho} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tilde{P}}{c^2} , \quad (4.7)$$

pri čemer smo upoštevali tudi enačbi (4.4) in (4.6). S pomočjo enačbe (4.7) lahko valovno enačbo (4.5) zapišemo še na dva načina, kot

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x^2}$$

in kot

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} .$$

Vse tri količine, u , $\tilde{\rho}$ in $\tilde{P}$, ubogajo valovno enačbo. Zelo pogosto se namesto njih uporablja še tako imenovani *hitrostni potencial* ϕ , na kar nas napeljuje enačba (4.1), ki jo zapišemo v obliki

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} .$$

Če zapišemo hitrost kot gradient potenciala ϕ ,

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} , \quad (4.8)$$

sledi

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} ,$$

in če zamenjamo vrstni red odvajanja po času in po koordinati na levi strani enačbe, dobimo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \tilde{P} \right) = 0 .$$

Iz tega dobimo

$$\tilde{P} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} . \quad (4.9)$$

Če enačbo (4.7) v obliki $-\rho \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tilde{P}}{c^2}$ odvajamo na čas in nato na levi strani zamenjamo vrstni red odvajanja, sledi

$$-\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} . \quad (4.10)$$

Hitrost $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ izrazimo s pomočjo enačbe (4.8), tlačno spremembo $\tilde{P}$ pa z enačbo (4.9) in vstavimo v enačbo (4.10). Tako dobimo valovno enačbo za hitrostni potencial,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} .$$

Torej imamo štiri valovne količine $\psi = u, \tilde{\rho}, \tilde{P}$ in ϕ in za vsako velja valovna enačba v obliki

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} . \quad (4.11)$$

kjer je hitrost valovanja c v vseh primerih podana z enačbo (4.6).

Primer 4.1:

Hitrost zvočnega valovanja je odvisna od adiabatne stisljivosti tekočine, ki je definirana z enačbo (4.3). Izračunamo jo s preprostim odvajanjem iz enačbe stanja tekočine v obliki $V = V(P, S)$, kjer je V prostornina izbrane množine tekočine, S pa njena entropija. Vendar enačbo stanja poznamo največkrat v obliki $V = V(P, T)$, ki nam omogoča da neposredno in preprosto izračunamo tako imenovano *izotermno stisljivost* tekočine, ki je definirana z enačbo

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (4.12)$$

Iz enačbe stanja v obliki $V(P, S)$ sledi

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S dP + \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P dS.$$

Nadalje lahko iz enačbe $V = V(P, S)$ izrazimo entropijo kot funkcijo tlaka in prostornine $S = S(P, V)$. Zdaj podobno kakor zgoraj zapišemo

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_V dP + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_P dV$$

in rezultat vstavimo v prejšnji izraz za dV . Sledi

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_P dV + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S + \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_V \right] dP.$$

Ker je očitno $\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_P = 1 / \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P$, lahko gornji izraz prepišemo v obliki

$$dV = dV + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S + \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_V \right] dP$$

in imamo,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = - \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_V.$$

Potrebujemo še $\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$, ki nastopa v izrazu za izotermno stisljivost. Iz enačbe stanja v obliki $V = V(P, T)$ sledi podobno kakor v prejšnjem primeru

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT.$$

Nadalje, iz enačbe stanja izrazimo $T = T(V, P)$, kar nam da

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V dP$$

in to vstavimo v prejšnji izraz za dV . Sledi

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \right] dP \equiv dV + \left[\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \right] dP$$

in

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V.$$

Če zdaj enačbo (4.3) delimo z enačbo (4.12), dobimo

$$\frac{\chi_S}{\chi_T} = \frac{(\partial V / \partial P)_S}{(\partial V / \partial P)_T} = \frac{(\partial V / \partial S)_P (\partial S / \partial P)_V}{(\partial V / \partial T)_P (\partial T / \partial P)_V} = \frac{(\partial S / \partial P)_V (\partial P / \partial T)_V}{(\partial S / \partial V)_P (\partial V / \partial T)_P} = \frac{(\partial S / \partial T)_V}{(\partial S / \partial T)_P}.$$

Iz termodinamske zveze $dQ = T dS$ in definicije specifičnih toplot c_P in c_V nadalje sledi

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{m c_V dT}{dT} \right) = \frac{m c_V}{T},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T} \left(\frac{m c_P dT}{dT} \right) = \frac{m c_P}{T},$$

kjer je m masa tekočine v izbrani prostornini V . Tako imamo

$$\frac{\chi_S}{\chi_T} = \frac{c_V}{c_P} = \frac{1}{\gamma}.$$

Adiabatno stisljivost tekočine izračunamo tako, da iz enačbe stanja v obliki $V = V(P, T)$ z odvajanjem določimo izotermno stisljivost in dobljeni rezultat delimo z razmerjem specifičnih toplot.

Za večino trdnih snovi in kapljev, razen redkih izjem, velja $c_P \approx c_V$, tako da je $\chi_S \approx \chi_T = \chi$. Stisljivost kapljev je reda velikosti $10^{-9} \text{ m}^2/\text{N}$, kar nam da za oceno hitrosti zvočnega valovanja v kapljevinah

$$c \approx \frac{1}{\sqrt{\rho \chi}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \chi}} \cdot \sqrt{\frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho}} \approx 10^3 \text{ ms}^{-1} \cdot \sqrt{\frac{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho}}.$$

V plinih je $c_P > c_V$ in za idealne pline velja $c_P - c_V = R/M$, kjer je R splošna plinska konstanta, M pa kilomolska masa plina. Za idealne pline imamo tako

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1 + \frac{R/M}{c_V}.$$

Za zrak na primer je $c_V = \frac{5}{2} \frac{R}{M}$ in $\gamma = 1,4$. Za vse idealne pline je izotermna stisljivost enaka in jo z lahkoto izračunamo s pomočjo plinske enačbe ali pa s pomočjo Boylevega zakona. Vzemimo plinsko enačbo in jo zapišimo v obliki $V = V(T, P) = \frac{m R T}{M P}$. Izotermno stisljivost izračunamo po enačbi (4.12) kot

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{V} \frac{m R T}{M P^2} = \frac{1}{P}.$$

Za idealne pline torej velja

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho \chi_T}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}},$$

kjer M pri plinski mešanici pomeni povprečno kilomolsko maso. Za zrak na primer je $M \equiv \bar{M} \approx 29 \text{ kg}$. Tako imamo

$$c_{\text{zrak}}(0^\circ\text{C}) = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8314 \text{ JK}^{-1} \cdot 273 \text{ K}}{29 \text{ kg}}} = 331 \text{ m/s}.$$

V primerjavi s tekočinami se v trdnih snoveh lahko razširja *longitudinalno* in tudi *transverzalno* valovanje, vendar z različnimi hitrostmi. V izotropnih snoveh je hitrost razširjanja valovanja odvisna le od elastičnega modula E , Poissonovega števila μ in gostote snovi ρ . Pri valovanju, ki se razširja v smeri osi x , imamo tako longitudinalno valovanje, pri katerem delci snovi nihajo v smeri razširjanja valovanja, ter dvojico neodvisnih transverzalnih valovanj, pri katerih delci nihajo pravokotno glede na smer razširjanja valovanja (na primer v smeri y in z). Hitrost longitudinalnega zvočnega valovanja c_l je enaka

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}} , \quad (4.13)$$

hitrost transverzalnega valovanja pa je

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{2(1 + \mu)}} \equiv \sqrt{\frac{G}{\rho}} ,$$

kjer je $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ strižni modul snovi. Ker velja $0 < \mu < 1/2$, sledi

$$c_l = c_t \sqrt{\frac{2(1 - \mu)}{(1 - 2\mu)}} > c_t \sqrt{2} .$$

Če se valovanje razširja vzdolž homogene palice s konstantnim presekom in katere prečne razsežnosti so majhne v primerjavi z valovno dolžino, preprost račun z uporabo 2. Newtonovega zakona in Hookovega zakona pokaže, da je hitrost longitudinalnega valovanja v tem primeru enaka

$$\tilde{c}_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} . \quad (4.14)$$

Hitrost longitudinalnega valovanja v tanki palici je manjša kakor v neomejeni homogeni elastični snovi. Iz enačb (4.13) in (4.14) namreč sledi

$$c_l = \tilde{c}_l \sqrt{\frac{(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}} = \tilde{c}_l \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 - \mu - 2\mu^2}} > \tilde{c}_l .$$

To je zato, ker smo pri tanki palici po tihem privzeli, da je ob straneh neobremenjena, tako da se lahko pri razširjanju longitudinalnega valovanja posamezni deli palice v prečni smeri neovirano krčijo in raztezajo in pri tem ne vplivajo na hkratno krčenje in raztezanje palice v vzdolžni smeri. Longitudinalno valovanje v tanki palici, ki ob straneh ni obremenjena, predstavlja torej razširjanje zgoščin in razredčin vzdolž palice in to razširjanje je v skladu z definicijo elastičnega modula E neodvisno od Poissonovega števila μ .

Rešitve valovne enačbe (4.11) razdelimo v dve skupini glede na to, kako nihajo pri danem valovanju posamezni deli tekočine eden glede na drugega. Na ta način razločimo tako imenovana *ravna potujoča valovanja*, ko različni deli tekočine nihajo enako, vendar ne hkrati, in pa *stojеča valovanja*, ko posamezni deli tekočine nihajo okrog svojih ravnovesnih leg istočasno, vendar z različnimi amplitudami.

Preglednica 4.1: Elastični modul in Poissonovo število ter hitrost zvoka v nekaterih snoveh

Snov	E (10^9 N/m^2)	ρ (kg/m^3)	$\tilde{c}_l = \sqrt{E/\rho}$ (m/s)	μ
aluminij	71,6	2700	5150	0,34
medenina	95	8500	3340	0,33
baker	125	8900	3750	0,35
svinec	16,5	11300	1210	0,43
magnezij	43	1740	4970	0,29
nikelj	205	8900	4800	0,30
jeklo	207	7800	5150	0,29
cink	13,1	7130	1350	0,33
beton	19,6	1700	3400	0,1 – 0,15
opeka	16,2	1800	3000	
steklo	67,6	2500	5200	
steklo (Pyrex)	62	2300	5200	0,24
pleksi steklo	3,7	1150	1800	
hrast	11,2	770	3814	0,15
trda guma	2,3	950	1560	0,4
granit	48,3	2690	4240	0,28
marmor	55,2	2800	4440	0,26

i) Ravno potujoče valovanje

Splošna rešitev valovne enačbe ima v tem primeru obliko

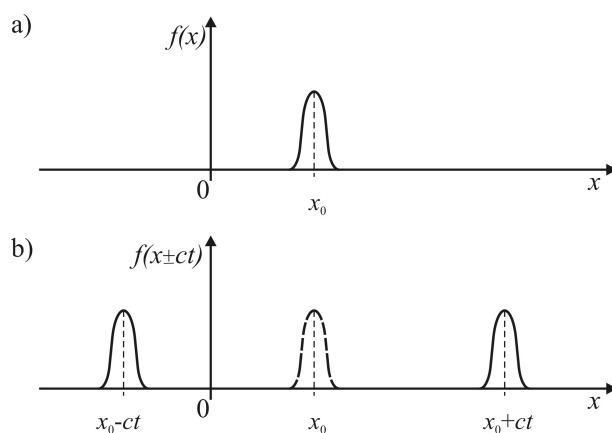
$$\psi(x, t) = f(x \pm ct) .$$

Velja namreč ($f' = \frac{df}{d\xi}$, $\xi = x \pm ct$),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 f'' ,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f'' .$$

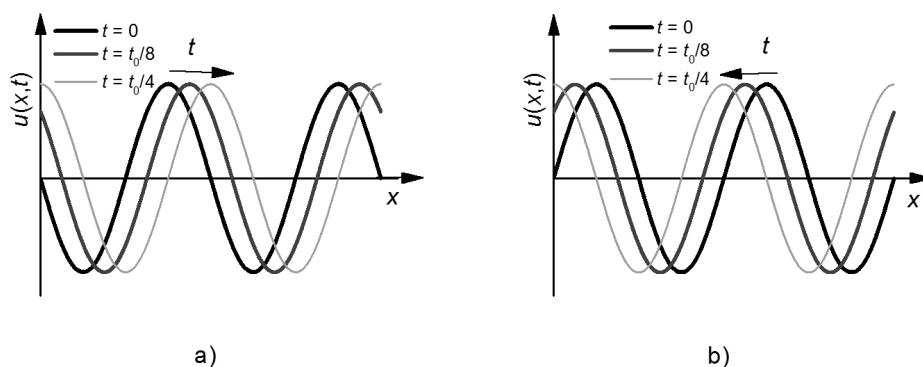
Ko ta izraza vstavimo v valovno enačbo (4.11), je enačbi identično zadoščeno za poljubno gladko funkcijo f . Naj bo $f(x)$ neka funkcija, ki ima maksimum pri $x = x_0$ (slika 4.3a). Funkcija $f(x \pm ct)$ ima pri $t = 0$ maksimum prav tako pri $x = x_0$, pri $t \neq 0$ pa pri $x \pm ct = x_0$ ali $x = x_0 \pm ct$. V času t se je vrh funkcije premaknil s hitrostjo c za $\pm ct$ v smeri pozitivne oziroma negativne osi x (slika 4.3b). Zato pravimo, da taka rešitev valovne enačbe pomeni potujoči val. Celotna funkcija potuje v nespremenjeni obliki v eno ali drugo smer vzdolž osi x s hitrostjo c , ki jo zato imenujemo *hitrost razširjanja valovanja*. Funkcija $f(x - ct)$ predstavlja val, ki se širi v smeri pozitivne osi, funkcija $f(x + ct)$ pa val, ki se širi v smeri negativne osi x . Valovanje se imenuje ravno zato, ker ležijo točke, v katerih ima *faza valovanja* $x \pm ct$ v danem trenutku enako vrednost na ravninah, ki so pravokotne na smer razširjanja valovanja.



Slika 4.3: Potujoče valovanje

Zelo pomemben primer potujočega valovanja je harmonično potujoče valovanje (slika 4.4a,b), ki ga običajno zapišemo v obliki

$$\psi(x, t) = A \sin k(ct \pm x) = A \sin(\omega t \pm kx). \quad (4.15)$$

Slika 4.4: Harmonično potujoče valovanje a) $u(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$, b) $u(x, t) = A \sin(\omega t + kx)$.

Namesto sinusne funkcije bi brez škode lahko zapisali tudi kosinusno funkcijo. Konstanta A se imenuje *amplituda valovanja*. Če izberemo dano plast tekočine (v izrazu (4.15), izberemo $x = \text{const}$), opazimo, da niha okrog ravnovesne lege z amplitudo A . Konstanto k , ki smo jo vpeljali v enačbi (4.15) zato, da je argument sinusa brezdimenzijsko število, izberemo tako, da velja

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4.16)$$

kjer je λ *valovna dolžina* valovanja in je definirana kot najkrajša razdalja med dvema točkama v tekočini, ki imata v danem trenutku enak odmik od ravnovesne lege in se gibljeta z enako hitrostjo v enaki smeri.

V matematični obliki to zapišemo

$$\psi(x, t) = \psi(x + \lambda, t) ,$$

in

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(x + \lambda, t)}{\partial t} .$$

Podobno je definirana *krožna frekvenca valovanja* ω ,

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} , \quad (4.17)$$

kjer je t_0 *nihajni čas* in je definiran podobno kakor valovna dolžina. To je najkrajši časovni interval med dvema zaporednima trenutkoma, v katerih ima izbrani del tekočine enak odmik od ravnovesne lege in se giblje z enako hitrostjo v enaki smeri. To je,

$$\psi(x, t) = \psi(x, t + t_0) ,$$

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(x, t + t_0)}{\partial t} .$$

Frekvenca valovanja je definirana tako kakor pri nihanju, to je

$$\nu = \frac{1}{t_0} . \quad (4.18)$$

Iz izraza (4.15) razberemo, da velja

$$kc = \omega \quad (4.19)$$

in če upoštevamo še enačbe (4.16), (4.17) in (4.18), sledi

$$\frac{2\pi}{\lambda} c = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi \nu ,$$

kar nam da

$$\nu = \frac{c}{\lambda} .$$

ii) Stoječe valovanje

V neomejeni tekočini se potujoče valovanje lahko razširja s poljubno frekvenco ω . To pa ne velja, če se valovanje razširja po tekočini, ki zapolnjuje omejen prostor. Valovna enačba je seveda enaka v enem in drugem primeru, razlika nastopi ob stenah prostora, kjer je gibanje tekočine omejeno. V tem primeru moramo valovno enačbo dopolniti s tako imenovanimi *robnimi pogoji*, ki natančno opredeljujejo dopustno obliko gibanja tekočine ob robu prostora. Rešitve valovne enačbe v tem primeru predstavljajo *stoječe valovanje* in jih običajno imenujemo, podobno kakor pri nihanju napete vrvi, *lastna nihanja* tekočine. Krožne frekvence, s katerimi tekočinski delci nihajo okrog ravnovesnih leg, določajo robni pogoji in jih imenujemo *lastne* ali *karakteristične frekvence*. Lastne frekvence so odvisne od oblike in velikosti prostora, ki ga zapolnjuje tekočina. Število lastnih frekvenc je zaradi predpostavke o zveznosti tekočine neomejeno, podobno kakor pri napeti vrvi. Določimo jih tako, da poiščemo tiste rešitve valovne enačbe, ki zadoščajo robnim pogojem.

Pri lastnem nihanju tekočine nihajo tekočinski delci tako, kakor pri lastnem nihanju nihajo posamezni deli sestavljenega nihala. Vsi deli nihajo z enako frekvenco in gredo hkrati skozi ravnovesne lege. To je, vsi deli nihajo z enako fazo. Nihanje posameznih tekočinskih delcev se razlikuje le po amplitudi. Izberimo valovno enačbo v obliki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

kjer u predstavlja pomike posameznih tekočinskih plasti glede na ravnovesne lege. V skladu s tem, kar smo povedali zgoraj, iščemo rešitev valovne enačbe v obliki

$$u(x, t) = f(x) \cos(\omega t - \delta) . \quad (4.20)$$

Nastavek nesemo v valovno enačbo in dobimo

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0 . \quad (4.21)$$

Kot primer si oglejmo stoječe valovanje v cevi z dolžino L , ki je na koncih zaprta in leži vzdolž koordinatne osi x . V skladu z enačbo (4.19) označimo $\omega/c = k$ in rešitev enačbe (4.21) zapišemo v obliki

$$f(x) = a \sin kx + b \cos kx . \quad (4.22)$$

Koordinatno izhodišče postavimo na levi konec cevi, tako da veljajo robni pogoji

$$u(x = 0, t) = u(x = L, t) = 0 ,$$

ker so pomiki tekočine ob togi steni prepovedani. Sledi $b = 0$ in

$$\sin kL = 0 \rightarrow kL = n\pi , \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty .$$

Lastna nihanja tako zapišemo v obliki

$$u_n(x, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos(\omega t - \delta_n) . \quad (4.23)$$

Ustrezne lastne frekvence so

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{c k_n}{2\pi} = c \frac{n\pi/L}{2\pi} = n \frac{c}{2L} = \frac{c}{\lambda_n} .$$

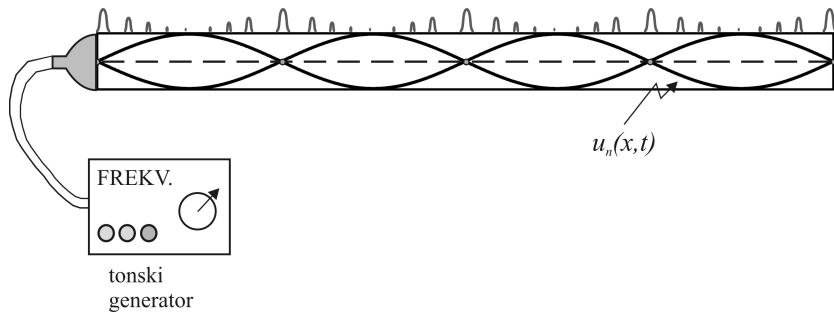
Če nas zanima nihanje tlaka, ga določimo s pomočjo enačbe (4.7), kar nam da

$$\tilde{P}(x, t) = -\rho c^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\rho c \omega_n a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos(\omega t - \delta_n) . \quad (4.24)$$

Iz rešitve (4.23) še razberemo, da so odmiki tekočinskih plasti glede na ravnovesno lego ves čas enaki nič v točkah $x = m(L/n)$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Ker plasti tekočine v teh legah ves čas mirujejo, te lege imenujemo *vozli* stoječega valovanja, podobno kakor pri valovanju na napeti vrvi. V vmesnih

legah $x = (2m + 1)(L/2n)$ pa je amplituda odmikov največja, zato te lege imenujemo *hrbti* stoječega valovanja. Izraz (4.24) pa nam pove, da so hrbti tlaka tam, kjer so vozli pomikov in nasprotno.

Stoječe valovanje lepo prikažemo s Kundtovo cevjo (slika 4.5). Zvočno valovanje v cevi ustvarimo z zvočnikom, ki ga pritrdimo na en konec cevi. Frekvenco zvoka, ki ga oddaja zvočnik, izberemo tako, da je enaka eni od lastnih frekvenc plina v cevi, pri čemer velja $L = n \lambda_n/2$. Nihanje plina v cevi je namreč najmočnejše tedaj, ko je nihanje membrane zvočnika v resonanci z nihanjem plina v cevi. Če vzdolž cevi v plašč izvrtamo v enakomernih razmikih drobne luknjice in cev napolnimo namesto z zrakom z gorilnim plinom, lahko ponazorimo stoječe valovanje s plamenčki plina, ki izteka iz cevi skozi luknjice. Plamenčki so največji tam, kjer so hrbti tlaka.



Slika 4.5: Kundtova cev. Tonski generator določa frekvenco zvoka, ki ga oddaja zvočnik. V primeru na sliki ima ton frekvenco $\nu_4 = \frac{c}{\lambda_4} = \frac{c}{2L/4} = \frac{2c}{L}$. Krivulja na sliki predstavlja odmik plinskih plasti v odvisnosti od kraja v trenutku, ko je odmik največji.

Primer 4.2:

Ravno potujoče valovanje, ki se razširja vzdolž osi x , lahko zapišemo v obliki $u(x, t) = f(x - ct)$. Če definiramo enotski vektor $\vec{n}$, ki kaže v smeri pozitivne osi x , lahko prejšnji izraz zapišemo v obliki, ki ni odvisna od izbire koordinatnega sistema:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{n} f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct) . \quad (4.25)$$

Ker je skalarni produkt dveh vektorjev neodvisen od izbire koordinatnega sistema, smemo koordinatni sistem zasukati tako, da ima vektor $\vec{n}$ v novem koordinatnem sistemu komponente (n_x, n_y, n_z) , ki zadoščajo enačbi

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 .$$

Lahko rečemo, da predstavlja izraz (4.25) ravno potujoče valovanje, ki se razširja v smeri vektorja $\vec{n}$. Preprost račun pokaže, da (4.25) zadošča valovni enačbi v obliki

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \right) . \quad (4.26)$$

Če imamo ravno harmonično valovanje, ki se razširja v smeri enotskega vektorja $\vec{n}$, ga zapišemo v obliki

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = A \vec{n} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) , \quad (4.27)$$

kjer smo definirali *valovni vektor* $\vec{k} = k \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$. Enačba (4.26) predstavlja valovno enačbo v treh dimenzijah. Harmonična potujoča valovanja so zelo pomembna, ker lahko s sestavljanjem takih valovanj z različnimi valovnimi vektorji sestavimo poljubno valovanje. Vsota harmoničnih valovanj se imenuje *Fourierjeva vrsta* in posamezni členi te vsote predstavljajo tako imenovane Fourierjeve komponente danega valovanja.

Valovno enačbo v treh dimenzijah za katero koli od valovnih količin lahko utemeljimo s preprosto posplošitvijo rezultatov, ki smo jih izpeljali za valovanje, ki se razširja vzdolž koordinatne osi x . Tako imamo

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \tilde{P} , \quad (4.28)$$

kjer je $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ tako imenovani *gradient* ali *operator nabla* v kartezičnih koordinatah. Nadalje naredimo zamenjave

$$\tilde{P} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \tilde{P} = -\frac{1}{\chi_S} \nabla \cdot \vec{u} , \quad (4.29)$$

$$\tilde{\rho} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \tilde{\rho} = -\rho \nabla \cdot \vec{u} ,$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow \vec{v} = \nabla \phi .$$

Valovno enačbo za katero koli od valovnih količin $\psi \in \vec{u}, \tilde{\rho}, \tilde{P}, \phi$ zapišemo v treh dimenzijah kot

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi ,$$

kjer je $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ *Laplaceov operator* v kartezičnih koordinatah.

Primer 4.3: Določi lastne frekvence in lastna nihanja zraka v kvadru s stranicami a, b, h (slika 4.6)!

Rešitev: Nalogo najlažje rešimo, če uporabimo valovno enačbo za tlak ali hitrostni potencial. Vzemimo enačbo za tlak,

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{P} .$$

Rešitev zapišemo v obliki

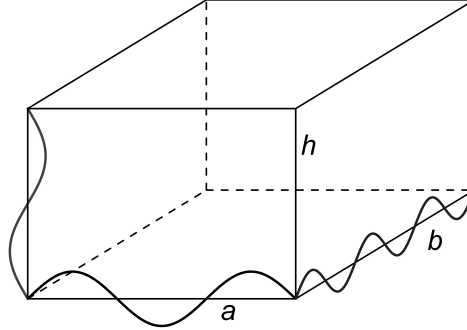
$$\tilde{P}(x, y, z, t) = f(x, y, z) \cos(\omega t - \delta)$$

in

$$f(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) .$$

Nastavek nesemo v valovno enačbo in dobimo ($k = \omega/c$)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y Z + X \frac{d^2 Y}{dy^2} Z + X Y \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 X Y Z = 0 .$$



Slika 4.6: Lastna nihanja zraka v kvadru s stranicami a , b , h . Obliko rešitev določajo robni pogoji na stenah kvadra: zračne plasti tik ob stenah mirujejo.

Če enačbo delimo z $X Y Z$, dobimo

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 .$$

Iz zadnje enačbe sledi, da so kvocienti na levi strani konstante, ki jih označimo z $-k_x^2$, $-k_y^2$ in $-k_z^2$, tako da velja

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2}$$

in

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 ,$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 ,$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 .$$

Rešitve zapišemo tako kakor v enačbi (4.22). Ker je hitrost zračnih plasti tik ob stenah v smeri pravokotno nanje enaka nič, robne pogoje zapišemo takole:

$$v_x(x=0, y, z, t) = v_x(x=a, y, z, t) = 0 ,$$

$$v_y(x, y=0, z, t) = v_y(x, y=b, z, t) = 0 ,$$

$$v_z(x, y, z=0, t) = v_z(x, y, z=h, t) = 0 .$$

Iz drugega Newtonovega zakona v obliki (4.28), $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \tilde{P}$, sledi

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \xi} \right|_{\xi=L} = 0, \quad \xi = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \text{ in } L = \begin{cases} a \\ b \\ h \end{cases}$$

Rešitve za X , Y in Z zapišemo v obliki (4.22), tako da imamo na primer

$$X = A \sin k_x x + B \cos k_x x$$

in

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \right|_{x=0,a} = (A k_x \cos k_x x - B k_x \sin k_x x) |_{x=0,a} Y(y) Z(z) \cos(\omega t - \delta) = 0 ,$$

kar nam da $A = 0$ in $\sin k_x a = 0$ ali $k_x = m \pi / a$, kjer je $m = 1, 2, 3, \dots$. Če uporabimo še druga dva robna pogoja, sledi

$$k_x = \frac{m \pi}{a}, \quad k_y = \frac{n \pi}{b}, \quad k_z = \frac{p \pi}{h}, \quad m, n, p = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

$$\omega_{mnp}^2 = c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{h^2} \right)$$

ter

$$\tilde{P}_{mnp}(x, y, z, t) = C_{mnp} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{h}z\right) \cos(\omega_{mnp}t - \delta_{mnp}) .$$

Primer s Kundtovo cevjo kakor tudi rezultat gornje naloge kažeta, da je najnižja lastna frekvenca v splošnem reda velikosti $\omega_{min} \approx c/L$, kjer je L značilna linearna razsežnost prostora, ki ga zapolnjuje tekočina.

4.2 Energija zvočnega valovanja in jakost zvoka

Ko se valovanje razširja po snovi, nosi energijo, ki jo imenujemo *energija valovanja*. Sestavljena je iz kinetične energije nihajočih delov tekočine in sprememb notranje energije, ki so posledica spreminjanja gostote in temperature snovi. Da se bomo izognili razpravi o spremembah notranje energije tekočine, ki jo povzroča valovanje, se bomo omejili le na povprečno vrednost energije valovanja v dani prostornini tekočine. Energija valovanja na enoto prostornine ali *gostota zvočne energije* je definirana kot

$$w = \frac{dW}{dV}$$

in jo običajno izražamo $[w] = \text{J/m}^3$. Povprečna vrednost gostote zvočne energije čez en nihajni čas ali eno valovno dolžino, ko imamo opravka z ravnim harmoničnim potujočim valovanjem, je

$$\bar{w} = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} w(x, t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} w(x, t) dx .$$

Določimo energijo stoječega valovanja v Kundtovi cevi z dolžino L in prečnim presekom S , ki je na obeh straneh zaprta. Stoječe valovanje naj ima obliko (4.23),

$$u(x, t) = 2 a \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \sin \omega t , \quad (4.30)$$

kjer je n neko poljubno pozitivno celo število. Iz zakona o ohranitvi energije sledi, da je energija stoječega valovanja v cevi, kot ga opisuje izraz (4.30), stalna in jo zato lahko izračunamo v poljubnem trenutku. V trenutku $t = 0$, na primer, so odmiki vseh plasti enaki nič, gostota tekočine je konstantna in enaka ravnovesni vrednosti po celotni cevi ($\tilde{\rho} = 0$). Celotna energija valovanja je nakopičena v obliki kinetične energije zračnih plasti. Hitrost tanke plasti na mestu x in v trenutku t je enaka

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = 2 a \omega \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \cos \omega t$$

in

$$v(x, 0) = 2 a \omega \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) .$$

Kinetična energija tanke plasti tekočine z debelino dx in prečnim presekom S je

$$dW_K \equiv dW = \frac{1}{2} dm v^2(x, 0) = 2 \rho S dx a^2 \omega^2 \sin^2\left(\frac{n \pi}{L} x\right) .$$

Celotna energija valovanja, nakopičena v cevi, je enaka

$$W = 2 \rho a^2 \omega^2 S \int_0^L \sin^2\left(\frac{n \pi}{L} x\right) dx = \rho a^2 \omega^2 S L = \bar{w} S L .$$

Torej je povprečna vrednost gostote zvočne energije v cevi

$$\bar{w} = \rho a^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 . \quad (4.31)$$

Stoječe valovanje (4.30) pa lahko zapišemo tudi kot sestav dveh enakih ravnih harmoničnih potujočih valovanj, ki se širita v nasprotnih smereh. To je,

$$u(x, t) = 2 a \sin kx \sin \omega t = a \cos(\omega t - kx) + (-a) \cos(\omega t + kx) ,$$

kjer smo označili $k = n \pi / L$. Ker se pri sestavljanju ali *interferenci* valovanj energija ohranja in se samo prerazporedi po prostoru, sledi, da je gostota povprečne energije stoječega valovanja enaka vsoti gostot povprečnih energij harmoničnih potujočih valovanj. Ker sta ti dve valovanji enaki, razlikujeta se le po smeri razširjanja, sklenemo na podlagi enačbe (4.31), da je gostota povprečne energije harmoničnega potujočega valovanja z amplitudo a in krožno frekvenco ω enaka

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 .$$

Ta rezultat je pomemben, ker se bomo v nadaljevanju ukvarjali predvsem s harmoničnimi valovanji.

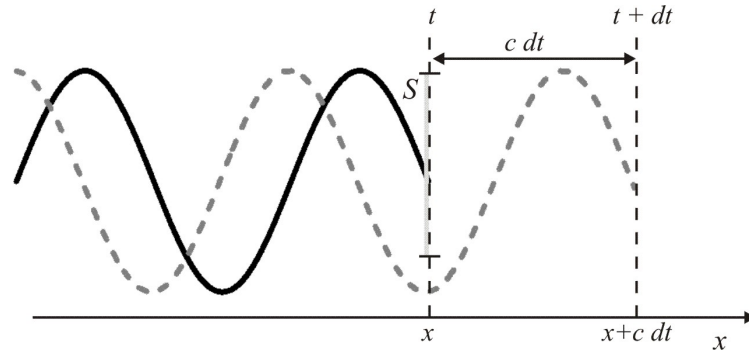
Energijski ali *zvočni tok* $\bar{P}$ skozi ravno ploskev S , ki je pravokotna na smer razširjanja ravnega harmoničnega valovanja, je definiran kot povprečna množina valovne energije, ki jo valovanje prenese skozi S v časovni enoti. Iz slike 4.7 je razvidno, da velja

$$\bar{P} = \frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{S c dt \bar{w}}{dt} = S \bar{w} c = S \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 c .$$

Gostota energijskega ali *zvočnega toka* $\bar{j}$ je množina prenesene zvočne energije na enoto ploskve S , torej imamo

$$\bar{j} = \bar{w} c = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 c .$$

Enoti za eno in drugo količino sta $[\bar{P}] = \text{W}$ in $[\bar{j}] = \text{W/m}^2$.



Slika 4.7: V času t je valovno čelo pri x . V naslednjem časovnem intervalu dt se valovno čelo premakne za $c dt$.

Jakost zvočnega valovanja ali na kratko *jakost zvoka* I je definirana kot povprečna vrednost zvočne energije, ki jo valovanje prenese v časovni enoti skozi enoto ploskve, ki je pravokotna na smer razširjanja valovanja. Tako imamo pri ravnem potujočem harmoničnem valovanju

$$I \equiv \bar{j} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 c . \quad (4.32)$$

Če imamo harmonično potujoče valovanje,

$$u = a \sin(\omega t - kx) ,$$

lahko določimo ustrezno nihanje tlaka s pomočjo enačbe (4.4). Sledi

$$\tilde{P} = -\rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \rho c a \omega \cos(\omega t - kx) ,$$

kjer smo upoštevali še enačbi (4.6) in (4.19). Označimo amplitudo nihanja tlaka s $\tilde{P}_0$, pa imamo

$$\tilde{P}_0 = \rho c a \omega .$$

Jakost zvoka lahko izrazimo tudi s pomočjo amplitude tlaka,

$$I = \frac{\tilde{P}_0^2}{2 \rho c} . \quad (4.33)$$

Ker je $\frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} \cos^2(\omega t - kx) dt = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} \cos^2(\omega t - kx) dx = \frac{1}{2}$, lahko izraz za jakost zvoka v obliki (4.32) in (4.33) zapišemo tudi takole:

$$I = \rho \overline{v^2} c = \frac{\overline{\tilde{P}^2}}{\rho c} , \quad (4.34)$$

kjer je $v = \partial u / \partial t = a \omega \cos(\omega t - kx)$. Iz same definicije je razvidno, da jakost zvoka izražamo v W/m^2 . Človek pri običajnem govoru oddaja vsako sekundo približno 10^{-5} J energije v obliki zvočnega

valovanja. Če torej vzamemo, da je presek ustne odprtine med govorom približno 10 cm^2 , je jakost zvoka, ki ga oddaja človek, $I = 10^{-5} \text{ W}/10 \text{ cm}^2 = 10^{-2} \text{ W}/\text{m}^2$. Kolikšna je ta jakost, se lahko prepričamo tako, da uho prislonimo na en konec kratke cevi s prečnim presekom 10 cm^2 , na drugem koncu pa nekdo govori v cev. Če človek na drugem koncu zavpije na ves glas, je jakost nastalega zvoka približno 100-krat večja. Zvok z jakostjo $1 \text{ W}/\text{m}^2$ je že na meji bolečine, zato bomo to jakost označili kot največjo dopustno jakost zvoka. Torej $I_{\max} = 1 \text{ W}/\text{m}^2$. Najmanjša jakost zvoka, ki ga normalno človeško uho še zazna, je odvisna od frekvence zvoka. Pri frekvenci 10^3 Hz je to $I_{\min} = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$.

Primer 4.4: Kolikšna je amplituda nihanja tlaka pri največji dopustni jakosti zvoka $I_{\max}$? Gostota zraka pri tlaku 1 bar in temperaturi 20°C je $1,204 \text{ kg}/\text{m}^3$, hitrost zvoka pri tej temperaturi pa je $343 \text{ m}/\text{s}$.

Rešitev: Iz enačbe (4.33) dobimo,

$$\tilde{P}_0 = \sqrt{2 \rho c I_{\max}} = \sqrt{2 \cdot 1,204 \text{ kg m}^{-3} \cdot 343 \text{ m s}^{-1} \cdot 1 \text{ W m}^{-2}} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ bar} = 30 \text{ N}/\text{m}^2.$$

Za toliko se poveča tlak v vodi na globini

$$h = \frac{30 \text{ N m}^{-2}}{10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} \approx 3 \text{ mm}.$$

Primer 4.5: Določi amplitudo nihanja zračnih plasti glede na ravnovesno lego pri jakosti zvoka $I_{\max}$ in pri frekvenci $\nu = 10^3 \text{ s}^{-1}$! Ponovi račun še za prag slišnosti, to je za $I_{\min}$.

Rešitev: Do odgovora pridemo s pomočjo enačbe (4.32). Sledi

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{2 I_{\max}}{\rho 4 \pi^2 \nu^2 c}} = \sqrt{\frac{2 \text{ W m}^{-2}}{1,204 \text{ kg m}^{-3} \cdot 4 \pi^2 10^6 \text{ s}^{-2} \cdot 343 \text{ m s}^{-1}}} \approx 10^{-5} \text{ m}.$$

Ker je $I_{\min} = 10^{-12} I_{\max}$, sledi $a_{\min} = 10^{-6} a_{\max} = 10^{-11} \text{ m}$ ali istega reda velikosti kakor premer vodikovega atoma.

Da človeško uho zazna zvok, ni dovolj le zadostna jakost, ampak je pomembna tudi frekvenca zvoka. Normalno človeško uho zaznava zvočno valovanje le na sorazmerno ozkem frekvenčnem intervalu, in sicer približno $20 \text{ Hz} < \nu < 20 \text{ kHz}$. Zvočna valovanja s frekvencami na tem intervalu imenujemo *slišni zvok*. Zvočna valovanja s frekvencami $\nu < 20 \text{ Hz}$ imenujemo *infrazvok*, s frekvencami $\nu > 20 \text{ kHz}$ pa *ultrazvok*. Veliko živali zaznava zvok na širšem frekvenčnem intervalu kakor človek. Netopirji na primer zaznavajo zvočna valovanja s frekvencami celo do 100 kHz .

Izkušnje kažejo, da občutek glasnosti zvoka ni sorazmeren z jakostjo zvoka, ampak z logaritmom jakosti. Uho kot sprejemnik zvoka ima torej logaritemsko skalo. V ta namen so v akustiki vpeljali količino, ki upošteva to lastnost človeškega ušesa in so definirali tako imenovano *raven zvočne jakosti* L ,

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_{\min}} \right). \quad (4.35)$$

Enota, s katero običajno opredelimo raven zvočne jakosti, se imenuje *decibel* in jo označujemo z dB. Tako je na primer raven zvočne jakosti pri običajnem govoru z jakostjo zvoka $10^{-2} \text{ W}/\text{m}^2$ enaka $L = 10 \log(10^{-2}/10^{-12}) = 10 \log 10^{10} = 100 \text{ dB}$.

Primer 4.6: Kolikšna je raven zvočne jakosti dveh nekoherentnih zvočil, če vsako od njih oddaja zvok z jakostjo $I_1 = 10^{-4} \text{ W/m}^2$? Nekoherentna zvočila so taka, pri katerih je jakost nastalega zvoka enaka vsoti zvočnih jakosti posameznih zvočil.

Rešitev: Raven vsakega zvočila posebej je v skladu z enačbo (4.35) enaka $L_1 = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_{\min}} \right) = 10 \log \left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}} \right) = 80 \text{ dB}$. Raven obeh zvočil skupaj pa je:

$$L = 10 \log \left(\frac{2 I_1}{I_{\min}} \right) = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_{\min}} \right) + 10 \log 2 = 80 \text{ dB} + 3 \text{ dB} = 83 \text{ dB} .$$

Če s pomočjo izraza za L_1 izrazimo $\frac{I_1}{I_{\min}} = 10^{L_1/10}$, lahko prejšnji izraz za L zapišemo še tako:

$$L = 10 \log \left(2 \cdot 10^{L_1/10} \right) .$$

Primer 4.7: Majhno zvočilo oddaja zvok enakomerno v vseh smereh (slika 4.8). Določi, kako se raven zvoka spreminja z oddaljenostjo od zvočila!

Rešitev: V koordinatnem izhodišču je zvočilo. Če zanemarimo absorpcijo zvoka v zraku, je množina zvočne energije, ki jo valovanje prenese skozi površino krogle s polmerom r , neodvisna od polmera krogle pri pogoju, da je $r \gg \lambda$. Tako imamo

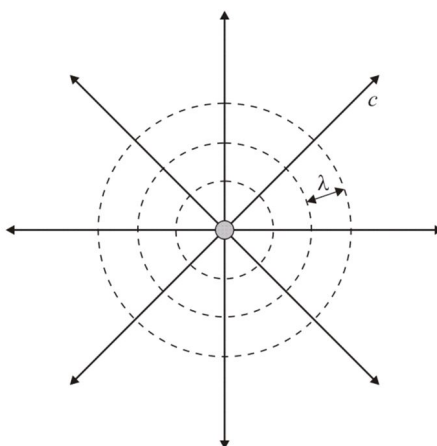
$$\bar{j} 4\pi r^2 \equiv I(r) 4\pi r^2 = \text{const}$$

in

$$I(r) 4\pi r^2 = I(r_1) 4\pi r_1^2 ,$$

kar nam da

$$I(r) = I(r_1) \frac{r_1^2}{r^2} . \quad (4.36)$$



Slika 4.8: Krogelno valovanje: črtkani koncentrični krogi predstavljajo valovne fronte. Valovni fronti, ki se v fazah razlikujeta za 2π , sta razmaknjeni za valovno dolžino.

Uporabimo enačbo (4.35), pa imamo

$$L = 10 \log \left(\frac{I(r)}{I_{min}} \right) = 10 \log \left(\frac{I(r_1)}{I_{min}} \cdot \frac{r_1^2}{r^2} \right) = L(r_1) - 20 \log \left(\frac{r}{r_1} \right) .$$

Če se razdalja od zvočila poveča za dvakrat ($r = 2 r_1$), se jakost zvoka zmanjša za štirikrat, raven zvočne jakosti pa se zmanjša za $20 \log 2 = 6$ dB.

Zvočno valovanje, ki ga oddaja zvočilo enakomerno v vseh smereh, imenujemo *krogelno valovanje* (slika 4.8). Točke, v katerih ima faza valovanja v danem trenutku enako vrednost, ležijo namreč na koncentričnih kroglih. Površini vsake take krogle ustreza določena vrednost faze. Če je $r \gg \lambda$, lahko krogelno valovanje obravnavamo kot ravno potujoče valovanje, ki se razširja v radialni smeri. Če vzamemo kot valovno količino na primer zvočni tlak $\tilde{P}(\vec{r}, t)$, lahko v skladu z enačbo (4.27) tako krogelno valovanje zapišemo v obliki

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \tilde{P}_0(r) \sin(\omega t - kr) ,$$

kjer smo že predvideli, da se amplituda nihanja tlaka spreminja z oddaljenostjo od zvočila. Kakšna je ta odvisnost, lahko ugotovimo s pomočjo (4.36) in izraza za jakost zvoka (4.33), ki velja tudi za krogelno valovanje pri pogoju $r \gg \lambda$. Enačbo (4.36) prepišemo v obliki

$$\frac{\tilde{P}_0^2(r)}{2 \rho c} = \frac{\tilde{P}_0^2(r_1)}{2 \rho c} \cdot \frac{r_1^2}{r^2}$$

in

$$\tilde{P}_0(r) = \tilde{P}_0(r_1) \cdot \frac{r_1}{r} .$$

Spreminjanje tlaka pri krogelnem valovanju ima tedaj obliko

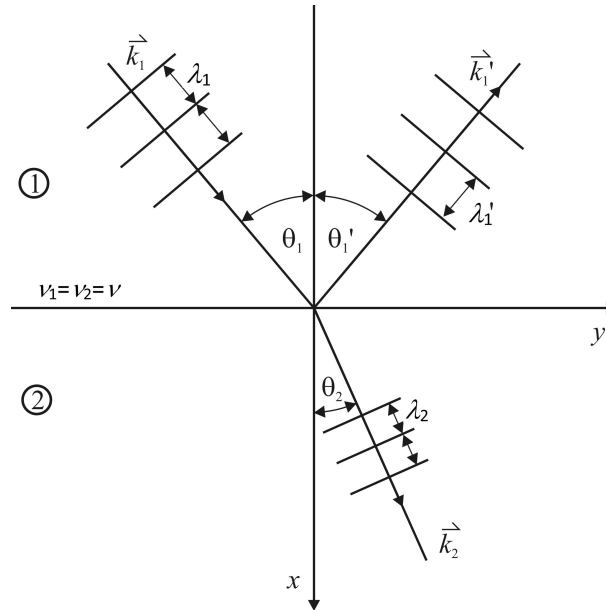
$$\tilde{P}(r, t) = \tilde{P}_0(r_1) \cdot \frac{\sin(\omega t - kr)}{\frac{r}{r_1}} . \quad (4.37)$$

4.3 Odboj in lom zvočnega valovanja

Na meji dveh sredstev se del vpadnega valovanja odbije, preostali del pa se razširi v drugo sredstvo. Valovanje v prvem sredstvu je tako sestavljeno iz vpadnega in odbitega valovanja, v drugem sredstvu pa obstaja samo prepuščeno valovanje. Smer razširjanja prepuščenega valovanja je v splošnem različna od smeri vpadnega valovanja, zato rečemo, da se valovanje na meji dveh sredstev *lomi*. Prepuščeno valovanje običajno imenujemo *lomljeno valovanje*. Kolikšen del valovanja se odbije in kolikšen prepusti, določimo s pomočjo *mejnih pogojev*, ki jim morajo na meji obeh sredstev zadoščati vsa tri valovanja.

Predpostavimo, da je mejna površina ravna ploskev, ki sovпада z ravnino $y - z$ ustreznega izbranega koordinatnega sistema. Koordinatna os x je pravokotna na mejno ravnino in je usmerjena tako, da sredstvo 1 zapolnjuje polprostor $x < 0$, polprostor $x > 0$ pa zapolnjuje sredstvo 2 (slika 4.9). Vpadno valovanje, ki se razširja iz sredstva 1 proti sredstvu 2, naj bo ravno harmonično valovanje,

$$\vec{u}_1 = A_1 \frac{\vec{k}_1}{k_1} \sin(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) ,$$



Slika 4.9: Vpadno, odbito in prepuščeno valovanje na meji sredstev 1 in 2

z valovnim vektorjem

$$\vec{k}_1 = \frac{\omega}{c_1} (\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0) . \quad (4.38)$$

θ_1 je kot, ki ga valovni vektor vpadnega valovanja oklepa z osjo x . V enačbi (4.38) smo vzeli, da leži valovni vektor vpadnega valovanja v ravnini $x - y$. Hitrosti c_1 in c_2 sta hitrosti valovanja v prvem in drugem sredstvu. Valovna vektorja odbitega in prepuščenega valovanja označimo s $\vec{k}_1'$ in $\vec{k}_2$. Ker je mejna površina ravna in ker se frekvenca nihanja tekočinskih delcev pri odboju in lomu valovanja ne spremeni, sta tudi prepuščeno in odbito valovanje ravni harmonični valovanji s frekvenco ω . Iz same simetrije problema je očitno, da so vse točke v mejni ravnini $y - z$ enakovredne. V matematični obliki to zapišemo kot:

$$(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})|_{x=0} = (\omega t - \vec{k}_1' \cdot \vec{r})|_{x=0} = (\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})|_{x=0}$$

Če označimo kartezične komponente valovnih vektorjev s k_{1x}, k_{1y}, k_{1z} , itd., lahko gornje enačbe prepišemo v obliki

$$k_{1y} y + k_{1z} z = k_{1y}' y + k_{1z}' z = k_{2y} y + k_{2z} z . \quad (4.39)$$

Ker morajo enakosti (4.39) veljati za vse vrednosti y in z na mejni ravnini, sledi

$$k_{1y} = k_{1y}' = k_{2y} , \quad (4.40)$$

$$k_{1z} = k_{1z}' = k_{2z} . \quad (4.41)$$

Nadalje, ker je $k_{1z} = 0$, sledi iz (4.41) $k'_{1z} = k_{2z} = 0$, ali z drugimi besedami, vsi trije valovni vektorji ležijo v ravnini $x - y$. Valovna vektorja odbitega in prepuščenega valovanja tako zapišemo kot

$$\vec{k}'_1 = \frac{\omega}{c_1} (-\cos \theta'_1, \sin \theta'_1, 0) ,$$

$$\vec{k}_2 = \frac{\omega}{c_2} (\cos \theta_2, \sin \theta_2, 0) ,$$

kjer je θ'_1 kot, ki ga oklepa valovni vektor odbitega valovanja z osjo x , θ_2 pa kot, ki ga oklepa valovni vektor prepuščenega valovanja z osjo x . Iz enačbe (4.40) sledi *odbojni zakon*

$$\theta_1 = \theta'_1 ,$$

in *lomni zakon*,

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} .$$

Vpadno, odbito in prepuščeno valovanje tako zapišemo,

$$\vec{u}_1 = A_1 \frac{\vec{k}_1}{k_1} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} (x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1) \right] , \quad (4.42)$$

$$\vec{u}'_1 = A'_1 \frac{\vec{k}'_1}{k'_1} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_1} (-x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1) \right] , \quad (4.43)$$

$$\vec{u}_2 = A_2 \frac{\vec{k}_2}{k_2} \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c_2} (x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2) \right] . \quad (4.44)$$

Mejni pogoji pri $x = 0$ zahtevajo, da je pomik tekočinskih plasti v smeri pravokotno na mejno ravnino v enem in drugem sredstvu enak in da sta tlaka v prvem in drugem sredstvu ob mejni ravnini enaka. Če upoštevamo izraze (4.42 - 4.44), orientacijo koordinatnega sistema in enačbe (4.6) in (4.29), robne pogoje zapišemo s temi enačbami:

$$u_{1x}(0, y, z, t) + u'_{1x}(0, y, z, t) = u_{2x}(0, y, z, t) , \quad (4.45)$$

$$\rho_1 c_1^2 \nabla \cdot \vec{u}_1|_{x=0} + \rho_1 c_1^2 \nabla \cdot \vec{u}'_1|_{x=0} = \rho_2 c_2^2 \nabla \cdot \vec{u}_2|_{x=0} . \quad (4.46)$$

Izraze (4.42 - 4.44) vstavimo v enačbi (4.45) in (4.46) in dobimo

$$\cos \theta_1 (A_1 - A'_1) = \cos \theta_2 A_2 , \quad (4.47)$$

$$\rho_1 c_1 (A_1 + A'_1) = \rho_2 c_2 A_2 \quad (4.48)$$

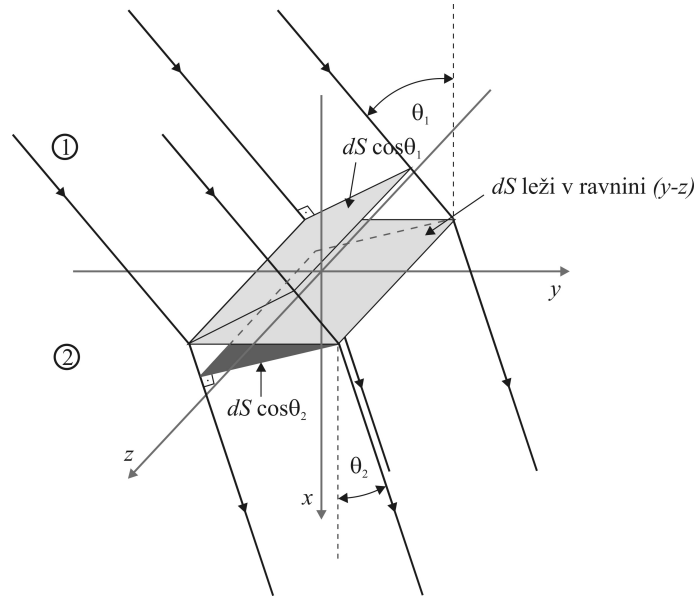
in

$$A'_1 = \left(\frac{\rho_2 \tan \theta_2 - \rho_1 \tan \theta_1}{\rho_2 \tan \theta_2 + \rho_1 \tan \theta_1} \right) A_1 , \quad (4.49)$$

$$c_2 A_2 = \left(\frac{2 \rho_1 \tan \theta_2}{\rho_2 \tan \theta_2 + \rho_1 \tan \theta_1} \right) c_1 A_1 .$$

Odbojni koeficient R je definiran kot kvocient med povprečno množino energije, ki jo odbito valovanje odnese v časovni enoti s površinskega elementa dS mejne ravnine, in povprečno množino energije, ki jo v časovni enoti vpadno valovanje prinese na površinski element dS . Ker ne smer vpadnega valovanja ne smer odbitega valovanja nista pravokotni na mejno ravnino, moramo pri izračunu vpadne in odbite energije upoštevati kot θ_1 (slika 4.10), tako da imamo:

$$R = \frac{\bar{j}'_1 \cos \theta_1}{\bar{j}_1 \cos \theta_1} = \frac{\frac{1}{2} \rho_1 A_1'^2 \omega^2 c_1 \cos \theta_1}{\frac{1}{2} \rho_1 A_1^2 \omega^2 c_1 \cos \theta_1} = \frac{A_1'^2}{A_1^2} . \quad (4.50)$$



Slika 4.10: Gostota energijskega toka, ki vpada na mejno ploskvico dS , je j_1 , gostota odbitega toka je j'_1 in gostota prepuščenega toka je j_2 . Kakor je razvidno iz slike, je energijski tok, ki ga prejema ploskvica dS , enak $j_1 dS \cos \theta_1$.

Ko upoštevamo enačbo (4.49), sledi

$$R = \left(\frac{\rho_2 \tan \theta_2 - \rho_1 \tan \theta_1}{\rho_2 \tan \theta_2 + \rho_1 \tan \theta_1} \right)^2 .$$

Rezultat za odbojni koeficient lahko še preuredimo, če upoštevamo $\tan \theta_2 = \sin \theta_2 / \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}$ in $\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1$. Tako dobimo

$$R = \left[\frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta_1}}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta_1}} \right]^2 . \quad (4.51)$$

Pri pravokotnem vpadu ($\theta_1 = 0$) se izraz (4.51) poenostavi in dobimo

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2. \quad (4.52)$$

Primer 4.8: Določi odbojni koeficient zvočnega valovanja iz zraka na gladino vode pri pravokotnem vpadu! Določi tudi amplitudo prepuščenega valovanja in raven zvočne jakosti prepuščenega zvoka na majhni globini, v kateri smemo zanemariti absorpcijo zvoka v vodi.

Rešitev: Če je temperatura zraka in vode 20°C , je hitrost zvoka v zraku $c_1 \approx 340\text{ m/s}$, v vodi pa $c_2 \approx 1412\text{ m/s}$. Nadalje je gostota zraka pri tej temperaturi $\rho_1 \approx 1,3\text{ kg/m}^3$, vode pa $\rho_2 \approx 10^3\text{ kg/m}^3$. Podatke vstavimo v enačbo (4.52) in dobimo

$$R = \left(\frac{10^3\text{ kg m}^{-3} \cdot 1412\text{ m s}^{-1} - 1,3\text{ kg m}^{-3} \cdot 340\text{ m s}^{-1}}{10^3\text{ kg m}^{-3} \cdot 1412\text{ m s}^{-1} + 1,3\text{ kg m}^{-3} \cdot 340\text{ m s}^{-1}} \right)^2 \approx 0,999.$$

Na meji med vodo in zrakom se valovanje praktično v celoti odbije. Da bomo lahko izračunali amplitudo prepuščenega valovanja in raven zvočne jakosti prepuščenega zvoka, moramo uporabiti zakon o ohranitvi zvočne energije na meji med zrakom in vodo. Iz zakona o ohranitvi zvočne energije sledi, da je gostota vpadnega zvočnega toka enaka vsoti gostote odbitega zvočnega toka in gostote prepuščenega zvočnega toka. Če je valovanje harmonično, sledi

$$\frac{1}{2} \rho_1 A_1^2 \omega^2 c_1 = \frac{1}{2} \rho_1 A_1'^2 \omega^2 c_1 + \frac{1}{2} \rho_2 A_2^2 \omega^2 c_2.$$

Celotno enačbo delimo z gostoto vpadnega zvočnega toka in upoštevamo definicijo (4.50), ter imamo

$$1 = R + \frac{\rho_2 A_2^2 c_2}{\rho_1 A_1^2 c_1}. \quad (4.53)$$

Če upoštevamo rezultat (4.52), sledi

$$1 - \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2 = \frac{\rho_2 c_2 A_2^2}{\rho_1 c_1 A_1^2},$$

ki nam da

$$A_2 = \frac{2 \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \cdot A_1.$$

Še hitreje lahko ta rezultat dobimo s pomočjo enačb (4.47) in (4.48). Vstavimo podatke in dobimo

$$A_2 = \frac{2 \cdot 1,3\text{ kg m}^{-3} \cdot 340\text{ m s}^{-1}}{10^3\text{ kg m}^{-3} \cdot 1412\text{ m s}^{-1} + 1,3\text{ kg m}^{-3} \cdot 340\text{ m s}^{-1}} \cdot A_1 \approx 6 \cdot 10^{-4} A_1.$$

Raven zvočne jakosti določimo najlažje z uporabo enačbe (4.53), iz katere sledi

$$\bar{j}_2 \equiv I_2 = (1 - R) \bar{j}_1 \equiv (1 - R) I_1$$

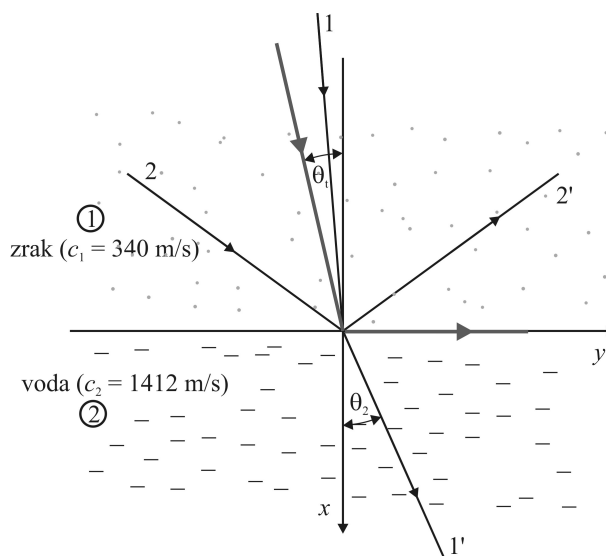
in

$$L_2 = 10 \log \left((1 - R) \frac{I_1}{I_{\min}} \right).$$

Zgornji rezultat velja le, če je $(1 - R) I_1 \geq I_{min}$, ker v nasprotnem primeru prepuščenega zvoka ne slišimo. Za odboj zvoka na meji med vodo in zrakom pri pravokotnem vpadu velja $1 - R \approx 10^{-3}$ in

$$L_2 = 10 \log \left(10^{-3} \frac{I_1}{I_{min}} \right) \approx L_1 - 30 \text{ dB} .$$

Pri pravokotnem odboju zvoka na meji med zrakom in vodo mora biti torej jakost vpadnega zvoka vsaj za faktor 10^3 večja od najmanjše jakosti zvoka, ki ga še slišimo, da bomo zaznali prepuščen zvok. Ali z drugimi besedami, raven zvočne jakosti vpadnega zvoka mora biti najmanj 30 decibelov.



Slika 4.11: Popolni odboj zvoka na meji med zrakom in vodo; mejni kot popolnega odboja je $\theta_t \approx 13^\circ$

Iz enačbe (4.51) nadalje razberemo, da je odbojni koeficient $R = 1$, če velja

$$c_1^2 = c_2^2 \sin^2 \theta_1$$

ali

$$\sin \theta_1 = \frac{c_1}{c_2} ,$$

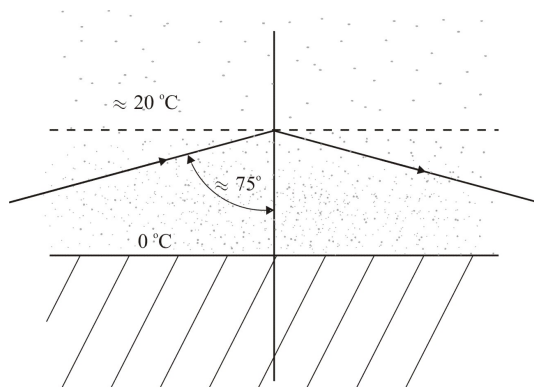
kar je mogoče le, če je $c_2 \geq c_1$. Iz lomnega zakona v tem primeru sledi $\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1$ in $\theta_2 = \pi/2$. Tak odboj lahko opazujemo na meji med zrakom in vodo (slika 4.11) ali ob sončnem dnevu, ko ni vetra. Takrat se zrak tik ob tleh močno segreje in je precej toplejši od zraka v višjih plasteh. Ker je hitrost zvoka v toplejšem zraku večja kakor v hladnejšem, se zvok, ki vpada proti vodoravnim tlom pod kotom, ki je večji od kota *popolnega* ali *totalnega odboja*,

$$\theta_t = \sin^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right) ,$$

popolno odbije nazaj v ozračje v skladu z odbojnim zakonom. To je zato, ker lomni kot θ_2 ne more biti večji od $\pi/2$. Do popolnega odboja pride tudi ob jasnih nočeh, ko se površina Zemlje zaradi sevanja

ohlaja in se s prevajanjem toplote ohlajajo tudi zračne plasti ob površju Zemlje. Zvok, ki potuje navzgor, se lahko na višjih toplejših plasteh zraka v celoti odbije nazaj proti Zemlji (slika 4.12). Če so razmere prave, se včasih zdi zvok prihajajočega vlaka močnejši ponoči ali proti večeru kakor čez dan. Če je temperatura zraka ob tleh 0°C , v višjih plasteh pa 20°C , je kot popolnega odboja enak

$$\theta_t = \sin^{-1} \left(\frac{c_1}{c_2} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{c_{(T=273\text{ K})}}{c_{(T=293\text{ K})}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{331}{343} \right) \approx 75^\circ.$$



Slika 4.12: Popolni odboj zvoka na „meji” med toplim in hladnim zrakom

Hitrost zvoka v zraku je odvisna tudi od vlažnosti in ker je gostota vlažnega zraka manjša od gostote suhega zraka, pričakujemo, da bo hitrost zvoka v vlažnem zraku večja kakor v suhem. Toda razlike niso velike in hitrost zvoka v nasičeno vlažnem zraku je le za kakšen m/s večja kot v suhem zraku pri isti temperaturi. Drugače je v megli, ko lahko izparevajo vodne kapljice ali kondenzira vodna para. V megli je hitrost zvoka manjša kakor v suhem zraku za nekaj deset m/s in to zmanjšanje je predvsem posledica večje stisljivosti megle v primerjavi s stisljivostjo nenasičeno vlažnega zraka. Naj za sklep dodamo, da je odboj zvoka na meji med hladnim in toplim zrakom ali na meji med suhim in vlažnim zrakom praviloma majhen, razen kadar pride do večkratnih odbojev.

4.4 Interferenca valovanja v tekočinah

Pojav *interference*, ki je značilen za valovanje, opišemo pri zvoku enako kakor na primer pri valovanju na vrvi. Ker je valovna enačba linearna, velja tako imenovano *načelo linearne superpozicije*, ki pravi, da je vsota rešitev valovne enačbe tudi rešitev. Če se torej po snovi razširja več valovanj hkrati, je odmik tekočinskih delcev na vsakem mestu enak vektorski vsoti odmkov, ki jih povzročajo posamezna valovanja. To je:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_1(\vec{r}, t) + \vec{u}_2(\vec{r}, t) + \dots$$

Z interferenco smo se že srečali, ko smo obravnavali stoječe valovanje v Kundtovi cevi. Stoječe valovanje si namreč lahko predstavljamo kot posledico interference valovanja, ki se širi vzdolž pozitivne

osi x , $u_1(x, t) = a \sin(\omega t - kx)$, in valovanja, ki se širi v nasprotni smeri, $u_2(x, t) = a' \sin(\omega t + kx)$. Tako imamo

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = a \sin(\omega t - kx) + a' \sin(\omega t + kx) . \quad (4.54)$$

Gornji valovanji si lahko predstavljamo kot vpadno in odbito valovanje, ki se razširjata vzdolž osi x v sredstvu z gostoto ρ_1 in hitrostjo zvoka c_1 , ki zapolnjuje polprostor $x < 0$. Polprostor $x > 0$ zapolnjuje sredstvo z gostoto ρ_2 , v katerem je hitrost zvoka c_2 . Mejna ravnina naj sovpada z ravnino $y - z$. Enačbi (4.47) in (4.48) za ta primer prepišemo v obliki

$$a + a' = a'' \quad (4.55)$$

in

$$\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} (a + a') = a'' . \quad (4.56)$$

Če je $\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$, potem iz enačbe (4.56) sledi $a'' \approx 0$, iz enačbe (4.55) pa dobimo $a' = -a$. Izraz (4.54) lahko tedaj prepišemo v obliki

$$u(x, t) = a \sin(\omega t - kx) - a \sin(\omega t + kx) = -2a \sin kx \cos \omega t ,$$

ki nam pove, da se je v polprostoru $x < 0$ zaradi interference vpadnega in odbitega valovanja ustvarilo stoječe valovanje. Ker se valovanje razširja v neskončno razsežen polprostor, so dovoljene vse frekvence. Lahko pa poskus prenašamo tako, da potopimo stekleno cev v vodo, tako kakor kaže slika 4.13a. Na zgornjem koncu držimo glasbene vilice, ki so izvor zvočnega valovanja. Ker se zvočno valovanje na meji zrak – voda skoraj v celoti odbije (4.52), je stoječe valovanje, ki se ustvari v tistem delu cevi, ki je zapolnjena z zrakom, tako kakor stoječe valovanje v cevi, ki je na eni strani odprta, na drugi pa zaprta. To pomeni, da je na gladini vode vozlišče, na odprtem koncu pa hrbet stoječega valovanja. Zvok, ki ga slišimo ob ustju cevi, je najmočnejši, ko je nihanje zraka v cevi v resonanci z glasbenimi vilicami (slika 4.13b).

Primer 4.9: Kolikšna je frekvenca zvoka, ki ga oddajajo glasbene vilice, če ob spreminjanju višine zračnega stolpca (tako da cev bolj ali manj potopimo v vodo) prvič zaslišimo močan zvok, ko je višina stolpca $h = 9 \text{ cm}$?

Rešitev: Da bomo lahko odgovorili na vprašanje, moramo določiti lastne frekvence nihanja zraka v cevi, ki je na enem koncu zaprta, na drugem pa odprta. Koordinatno os x usmerimo vzdolž cevi in koordinatno izhodišče postavimo na gladino vode v cevi. Višina zračnega stolpca naj bo h . Rešitve valovne enačbe zapišemo v obliki (4.20, 4.22)

$$u(x, t) = (a \sin kx + b \cos kx) \cos(\omega t - \delta) .$$

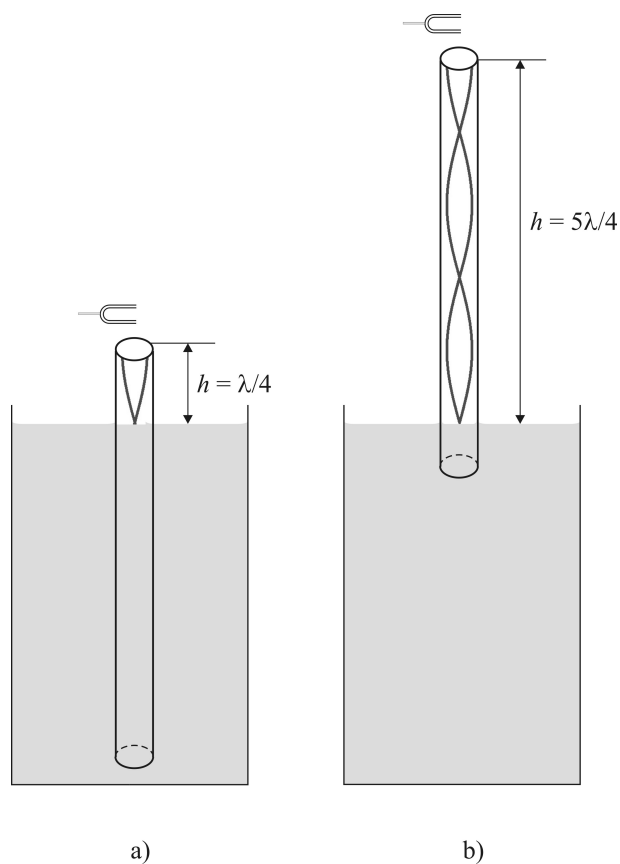
Ustrezni robni pogoji so

$$u(x = 0, t) = 0 ,$$

$$\tilde{P}(x = h, t) = -\rho c^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=h} = 0 .$$

Sledi $b = 0$ in $\frac{\partial \sin kx}{\partial x} \Big|_{x=h} = k \cos kh = 0$, kar nam da $kh = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2 \dots$ ali

$$h = (2n + 1) \frac{\pi}{2k} = (2n + 1) \frac{\pi}{2 \frac{2\pi}{\lambda}} = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) \frac{c}{4\nu} ,$$



Slika 4.13: Stojече valovanje v cevi

kjer je ν frekvenca glasbenih vilic. Resonanca se najprej vzpostavi pri $n = 0$ in tedaj velja

$$\nu = \frac{c}{4h} = \frac{343 \text{ m s}^{-1}}{4 \cdot 0,09 \text{ m}} = 953 \text{ s}^{-1}.$$

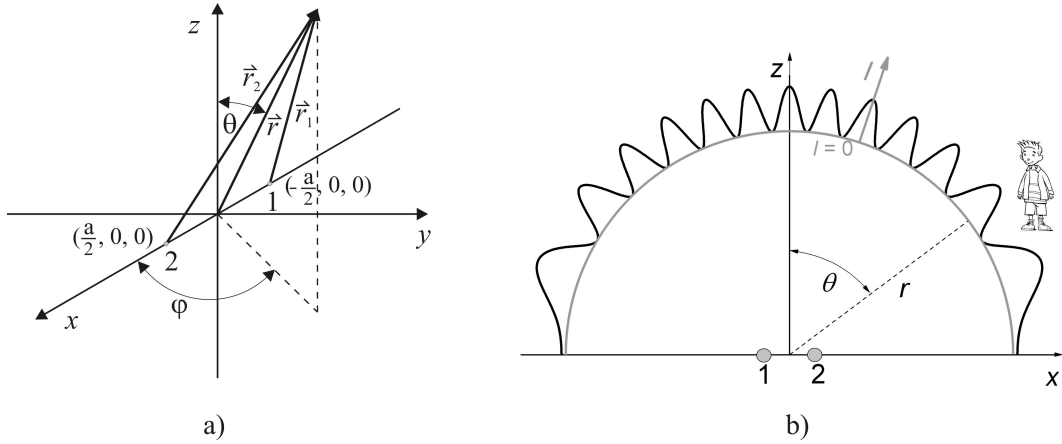
Valovna dolžina zvoka, ki ga dajejo glasbene vilice, je $\lambda = 4h = 0,36 \text{ m}$. Naslednji višini zračnega stolpca, pri katerih slišimo močan zvok, sta $h = 3\frac{\lambda}{4} = 0,27 \text{ m}$ in $h = 5\frac{\lambda}{4} = 0,45 \text{ m}$.

Kakor smo že večkrat omenili, lahko zvočno valovanje opišemo tudi tako, da navedemo nihanje tlaka za poljubno točko v tekočini. V tem primeru imamo

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \tilde{P}_1(\vec{r}, t) + \tilde{P}_2(\vec{r}, t) + \dots$$

Kot poseben primer si oglejmo interferenco dveh krogelnih valovanj, ki ju oddajata dva enaka majhna zvočna izvora, ki sta oddaljena eden od drugega za $a > \lambda$ (slika 4.14). Koordinatni sistem izberemo tako, kakor je prikazano na sliki. Sprejemnik zvoka naj bo v točki s krajevnim vektorjem ($r \gg a$)

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}.$$



Slika 4.14: Interferenca zvočnih valovanj, ki ju oddajata zvočnika 1 in 2. (a) Zvočnika sta na koordinatni osi x in oddaljena eden od drugega za a . (b) Valovanje v ravnini (x, z) , $\varphi = 0$, os y kaže pravokotno v list.

S θ označimo kot, ki ga krajevni vektor oklepa z osjo z , s φ pa kot, ki ga projekcija krajevnega vektorja na ravnino $x - y$ oklepa z osjo x . Nihanje tlaka na mestu sprejemnika zvoka zapišemo v skladu z enačbo (4.37)

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \tilde{P}_0 r_0 \left[\frac{\sin(\omega t - k r_1)}{r_1} + \frac{\sin(\omega t - k r_2)}{r_2} \right], \quad (4.57)$$

kjer je $\tilde{P}_0$ amplituda tlaka na oddaljenosti r_0 od enega ali drugega izvora, r_1 in r_2 pa sta oddaljenosti sprejemnika od prvega in drugega zvočnika (slika 4.14). Nadalje naj bo $a \ll r, r_1, r_2$, tako da velja

$$r_1 = \sqrt{r^2 + a r \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}} \approx r + \frac{1}{2} a \sin \theta \cos \varphi + \dots,$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 - a r \sin \theta \cos \varphi + \frac{a^2}{4}} \approx r - \frac{1}{2} a \sin \theta \cos \varphi + \dots.$$

Ker je $r \gg a$, smemo v imenovalcih izraza (4.57) r_1 in r_2 nadomestiti z r , kar nam da

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \tilde{P}_0 \frac{r_0}{r} \left[\sin \left(\omega t - k r - \frac{1}{2} k a \sin \theta \cos \varphi \right) + \sin \left(\omega t - k r + \frac{1}{2} k a \sin \theta \cos \varphi \right) \right].$$

Če upoštevamo enakost $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$, sledi

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = 2 \tilde{P}_0 r_0 \cos \left(\frac{1}{2} k a \sin \theta \cos \varphi \right) \frac{\sin(\omega t - k r)}{r} \equiv \tilde{P}_0(\theta, \varphi) \frac{\sin(\omega t - k r)}{\frac{r}{r_0}}. \quad (4.58)$$

Rezultat (4.58) nam pove, da je zvočno valovanje na mestu sprejemnika, katerega oddaljenost od zvočnikov je velika v primerjavi z razdaljo med njima, krogelno simetrično z amplitudo, ki je odvisna od smeri, v

kateri je sprejemnik. V smereh, za katere velja

$$\frac{1}{2} k a \sin \theta \cos \varphi = N \pi, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2 \dots, \quad (4.59)$$

se valovanji medsebojno ojačita, tako da govorimo o *konstruktivni interferenci*. V smereh, za katere velja

$$\frac{1}{2} k a \sin \theta \cos \varphi = (2N + 1) \frac{\pi}{2}, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.60)$$

in se valovanji medsebojno izničita (slabita), pa imamo *destruktivno interferenco*. Če upoštevamo $k = 2\pi/\lambda$, lahko prejšnji enačbi prepisemo v obliki

$$a \sin \theta \cos \varphi = \begin{cases} N \lambda \\ (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \end{cases}.$$

V smereh, ki jih določa enačba (4.59), zazna sprejemnik močan zvok, v smereh, ki jih določa enačba (4.60), pa sprejemnik ne zazna zvoka oziroma je močno oslavljen.

Poglejmo še, kakšen zvok zazna sprejemnik, če sta izvora tako blizu drug drugemu, da velja $ka \ll 1$, hkrati pa se njuni frekvenci razlikujeta za $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. V tem primeru (4.57) prepisemo v obliki

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \tilde{P}_0 \frac{r_0}{r} \left[\sin \omega_1 \left(t - \frac{r}{c} \right) + \sin \omega_2 \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (4.61)$$

Če štejemo čas od trenutka $t_1 = \frac{r}{c}$, tako da čas t v enačbi (4.61) nadomestimo s $t + \frac{r}{c}$, imamo

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \tilde{P}_0(r) [\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t], \quad (4.62)$$

kjer smo označili amplitudo tlaka na oddaljenosti r s $\tilde{P}_0(r) = \tilde{P}_0 \frac{r_0}{r}$. Če vzamemo, da velja $\Delta\omega \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \equiv \omega$, sledi

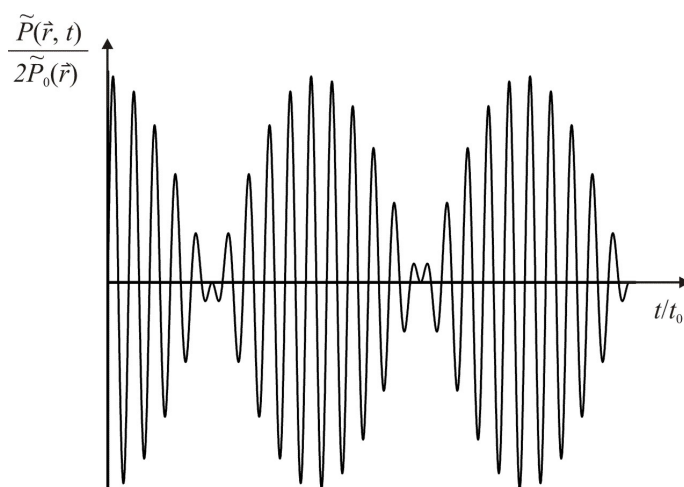
$$\tilde{P}(\vec{r}, t) \approx \left(2 \tilde{P}_0(r) \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cdot \sin \omega t \equiv \tilde{P}_0(r, t) \sin \omega t. \quad (4.63)$$

Če je sprejemnik zvoka človeško uho, se takoj ponuja vprašanje, kaj poslušalec dejansko sliši. Ali zaznava dva ločena zvoka, kakor to sledi iz enačbe (4.62), ali sliši en sam zvok, katerega jakost se spreminja v skladu z enačbo (4.63). Pokaže se, da je subjektivna ocena vrste zaznanega zvoka odvisna od razlike frekvenc $\Delta\omega$ posameznih zvočnih valovanj. Če je $\Delta\omega/\omega$ več kot približno 6 %, zazna poslušalec dva ločena zvoka, v nasprotnem primeru pa poslušalec zazna en sam zvok s spreminjajočo se amplitudo.

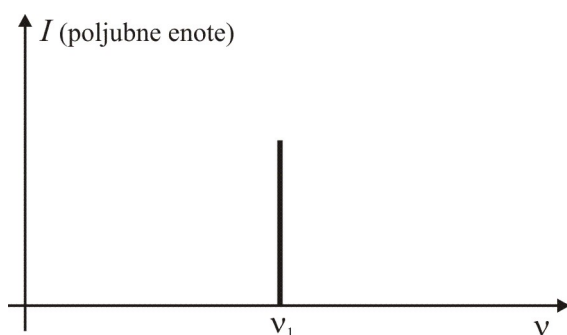
Zvočno valovanje, ki ga opisuje enačba (4.63), imenujemo *utripanje* in je prikazano na sliki 4.15. Jakost utripanja se spreminja po enačbi (4.33),

$$I(t) = \frac{\tilde{P}_0^2(r, t)}{2 \rho c} = \frac{2 \tilde{P}_0^2(r)}{\rho c} \cos^2 \left(\frac{\Delta\omega}{2} t \right) = \frac{\tilde{P}_0^2(r)}{\rho c} (1 + \cos \Delta\omega t).$$

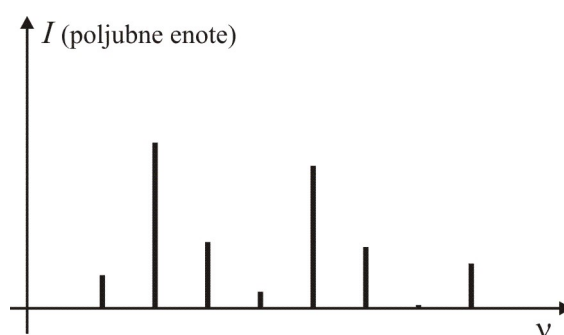
Zvočna jakost utripanja se torej spreminja s frekvenco $\Delta\omega$, ki jo zato imenujemo *frekvenca utripanja*.



Slika 4.15: Utripanje. Frekvenca utripanja je $\nu_u = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$, $t_0 = \frac{1}{\nu_u}$ (enačba 4.63).



Slika 4.16: Spekter tona



Slika 4.17: Spekter zvena

Kakšen zvok zazna človeško uho, je torej odvisno tudi od sestave zvoka. Če vsebuje na primer nihanje tlaka na mestu sprejemnika eno samo harmonično komponento,

$$\tilde{P}(t) = \tilde{P}_0 \cos(\omega t - \delta) ,$$

imenujemo tak zvok *ton*. V *spektru* tona, v katerem je grafično prikazana odvisnost jakosti zvoka od frekvence, nastopa ena sama črta (slika 4.16). Če pa je nihanje tlaka na mestu sprejemnika sestavljeno iz več harmoničnih nihanj s frekvencami, ki so v razmerju celih števil, tak zvok imenujemo *zven*. V matematični obliki nihanje tlaka pri zvenu zapišemo kot

$$\tilde{P}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_{0n} \cos(n \omega t - \delta_n) .$$

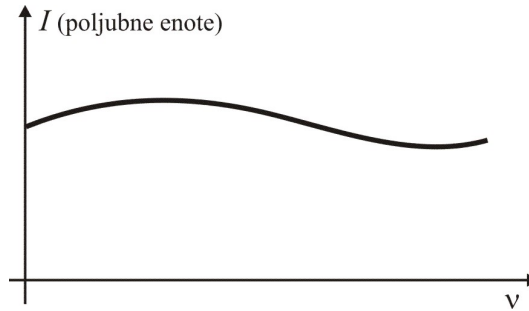
Jakost zvena je (4.34)

$$I = \frac{\overline{\tilde{P}^2}}{\rho c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{P}_{0n}^2}{2 \rho c},$$

pri čemer smo upoštevali

$$\int_0^{t_0} \sin n\omega t \sin m\omega t dt = \int_0^{t_0} \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \frac{t_0}{2} \delta_{n,m}$$

in $t_0 = 2\pi/\omega$. Drugi integrali, ki nastopajo v izrazu za I , so enaki nič. Spekter zvena je prikazan na sliki 4.17. Če frekvence, ki nastopajo v spektru zvoka, niso v razmerju celih števil, zvok imenujemo *šum*. Spekter šuma je *zvezen* (slika 4.18), v nasprotju s spektrom tona in zvena, ki sta *diskretna*. To je zato, ker nihanje tlaka pri šumu ni periodična funkcija časa.



Slika 4.18: Spekter šuma je zvezen

4.5 Sipanje in uklon zvočnega valovanja

Ko valovanje zadene oviro, se del valovanja odkloni od prvotne smeri razširjanja. Razliko med nastalim valovanjem $\tilde{P}(\vec{r}, t)$ in valovanjem $\tilde{P}_i(\vec{r}, t)$, ki bi se razširjalo po sredstvu, če ovire ne bi bilo, imenujemo *sipano valovanje* $\tilde{P}_s(\vec{r}, t)$. Nastalo valovanje tako zapišemo kot vsoto vpadnega valovanja $\tilde{P}_i(\vec{r}, t)$ in sipanega valovanja $\tilde{P}_s(\vec{r}, t)$,

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \tilde{P}_i(\vec{r}, t) + \tilde{P}_s(\vec{r}, t). \quad (4.64)$$

Če je velikost ovire velika v primerjavi z valovno dolžino, se približno polovica sipanega valovanja razširja stran od ovire bolj ali manj enakomerno v vseh smereh, druga polovica pa je skoncentrirana v smereh za oviro, kjer destruktivno interferira z vpadnim valovanjem in tako ustvarja za oviro ostro *valovno senco*. V tej limiti govorimo o *geometrijski akustiki*. Delež sipanega valovanja, ki se razširja enakomerno v vseh smereh, se imenuje *odbito valovanje*, delež, ki je odgovoren za nastanek valovne sence, pa se imenuje *interferirajoči ali uklonski val*. V nasprotnem primeru, ko je velikost ovire majhna v primerjavi z valovno dolžino, je sipano valovanje praktično v celoti porazdeljeno enakomerno po vseh smereh in za oviro skoraj ni valovne sence. V vmesnem območju, ko je velikost ovire istega reda velikosti kakor valovna dolžina, je cela vrsta zanimivih interferenčnih pojavov.

Valovne dolžine slišnega zvoka so na intervalu od približno 2 cm do 20 m in v veliki večini primerov v praksi so velikosti ovir manjše ali pa istega reda velikosti. Destruktivna interferenca med vpadnim in sipanim valovanjem, ki je odgovorna za nastanek valovne sence, je zato nepomembna. Ko na primer stojimo za drevesom, prav dobro slišimo zvok, ki prihaja iz nasprotne smeri.

Razmere so podobne, ko valovanje vpada na neprepusten² zaslon z odprtinami. Podobno kakor takrat, ko zadeva valovanje ob ovire, tudi zdaj dobimo ostre valovne sence le takrat, ko je velikost odprtini velika v primerjavi z valovno dolžino. V nasprotnem primeru se precejšen delež valovanja razširja v geometrijsko senco zaslona. Kot smo že omenili, ta pojav imenujemo *uklon*. Med enim in drugim primerom je zveza, ki je vsebovana v tako imenovanem *Babinetovem načelu*. Vzemimo dva neprepustna ravna zaslona z odprtinami, ki se razlikujeta v tem, da so odprtine na drugem zaslonu tam, kjer je prvi zaslon neprepusten, in nasprotno. Za tak par zaslonov pravimo, da sta *komplementarna*. Zaslona naj ležita v ravnini $y - z$ in vpadno valovanje se razširja v smeri osi x . Valovanje, ki se vzpostavi na nasprotni strani zaslona, od koder prihaja vpadno valovanje v enem in drugem primeru, zapišemo v skladu z enačbo (4.64) kot

$$\tilde{P}_1 = \tilde{P}_i + \tilde{P}_s^{(1)} , \quad (4.65)$$

$$\tilde{P}_2 = \tilde{P}_i + \tilde{P}_s^{(2)} , \quad (4.66)$$

Če valovanje vpada na zaslon, ki ga sestavimo tako, da oba prejšnja zaslona postavimo tesno enega za drugim, kar nam da v celoti neprepusten zaslon, velja

$$\tilde{P}_{1\&2} \equiv 0 = \tilde{P}_i + \tilde{P}_s^{(1)} + \tilde{P}_s^{(2)} .$$

Iz enačb (4.65) in (4.66) izrazimo $\tilde{P}_s^{(1)}$ in $\tilde{P}_s^{(2)}$ in imamo

$$\tilde{P}_2 = \tilde{P}_i - \tilde{P}_1 . \quad (4.67)$$

Sipani valovanji za enim in za drugim zaslonom se razlikujeta le po predznaku.

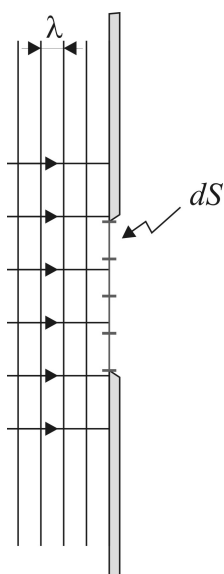
Vzemimo ravno harmonično valovanje, ki se razširja vzdolž koordinatne osi x ,

$$\tilde{P}(x, t) = \tilde{P}_0 \sin(\omega t - kx) .$$

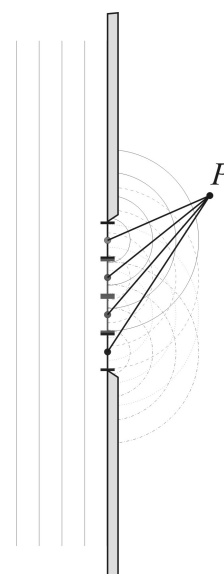
Valovanje naj vpada na neprepusten zaslon, ki leži v ravnini $y - z$ in ima odprtino, ki je velika v primerjavi z valovno dolžino. V tem primeru je valovanje, ki doseže odprtino, približno tako, kakor da zaslona sploh ne bi bilo. Površino odprtine (slika 4.19) razdelimo na majhne ploskovne elemente dS . Vsak element dS je izvor krogelnega valovanja. Valovanje v izbrani točki P (slika 4.20) je rezultat interference valovanj, ki prihajajo iz različnih površinskih elementov odprtine. To je tako imenovano *Huygens-Fresnelovo načelo*, ki ga v matematični obliki zapišemo z enačbo

$$\tilde{P}(P, t) = C \int_S \frac{\tilde{P}_0 \sin(\omega t - kr + \delta)}{r} dS , \quad (4.68)$$

²Neprepusten je zaslon, v katerem se valovanje v celoti absorbira.



Slika 4.19: Ravno harmonično potujoče valovanje vpada na neprepusten zaslon z odprtino S



Slika 4.20: Huygens-Fresnelovo načelo: vsak površinski element dS si predstavljamo kot izvor krogega valovanja

kjer je r oddaljenost izbrane točke P od površinskega elementa dS . Podrobnejši račun pokaže³, da moramo konstanto C in fazni zamik δ izbrati tako, da velja $C = k/2\pi$ in $\delta = \pi/2$. Torej velja to pravilo: *Pri uporabi Huygens-Fresnelovega načela (4.68) moramo fazo vpadnega valovanja v odprtini zaslona povečati za četrt nihaja in ploskovni element moramo deliti z valovno dolžino.* Tako imamo

$$\tilde{P}(P, t) = \frac{k}{2\pi} \int_S \frac{\tilde{P}_0 \cos(\omega t - kr)}{r} dS. \quad (4.69)$$

Primer 4.10:

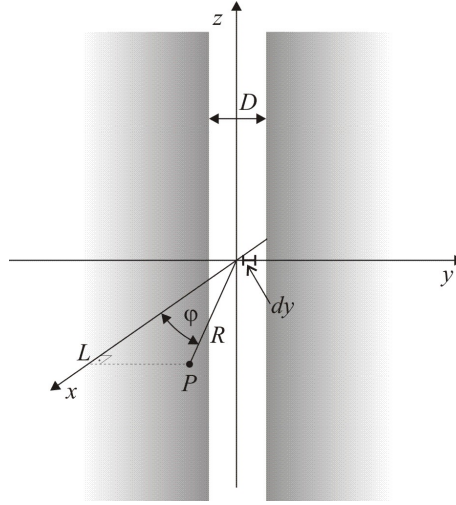
Za ponazoritev si oglejmo uklon zvočnega valovanja na ozki neskončno dolgi reži, ki leži v ravnini $x = 0$, tako da je os z njena simetrala (slika 4.21). Na območju $x < 0$ imamo ravno zvočno valovanje, ki se razširja v smeri osi x ,

$$\tilde{P}(x, t) = \tilde{P}_0 \sin(\omega t - kx), \quad x < 0.$$

Ker je reža vzdolž osi neomejena, sledi, da je sekundarno valovanje, ki izhaja iz posameznih točk reže, cilindrično valovanje, ki ga zapišemo v obliki:

$$\tilde{P}(\vec{R}, t) = C \frac{\sin(\omega t - kR + \delta')}{\sqrt{R}},$$

³Rayleigh, J.W.S., *Theory of Sound*, Dover, New York, 1945.



Slika 4.21: Uklon zvočnega valovanja na neskončni dolgi reži s širino D , ki leži v ravnini $(y - z)$ in je vzporedna s koordinatno osjo z . Vpadno valovanje ($x < 0$) se razširja v smeri pozitivne osi x .

ki jo utemeljimo enako, kakor smo to naredili za krogelno valovanje. Vektor $\vec{R}$ leži v ravnini, ki je vzporedna z ravnino $x-y$ in fazni zamik smo v skladu z definicijo cilindričnega valovanja zapisali v obliki $\delta' = -\frac{\pi}{4} + \delta$. Tako smo se v integralu (4.69) znebili integracije vzdolž osi z . Kar nas zanima, je zvočno valovanje, ki prihaja skozi režo in ga opazujemo v ravnini, ki je vzporedna z ravnino $y - z$ in je na veliki oddaljenosti L od reže. S tem smo se omejili na tako imenovani *Fraunhoferjev uklon*. Če je reža široka v primerjavi z valovno dolžino, je valovanje na veliki oddaljenosti⁴ v glavnem omejeno na ozek pas, ki je vzporeden z režo in ima približno enako širino. Zvočno valovanje v točki s polarnimi koordinatami R, φ , kjer je φ kot, ki ga valovni vektor oklepa z osjo x in izvira iz točk v reži, ki ležijo na intervalu dy (slika 4.21), zapišemo v naslednji obliki:

$$d\tilde{P}(R, \varphi, t) \approx \frac{C}{\sqrt{L}} \sin(\omega t - kL + \delta' + ky \sin \varphi) dy .$$

Pri tem smo upoštevali, da za majhne kote φ velja $R = \frac{L}{\cos \varphi} \approx L$. Tako imamo

$$\tilde{P}(R, \varphi, t) \approx \frac{C}{\sqrt{L}} \int_{-D/2}^{D/2} \sin(\omega t - kL + \delta' + ky \sin \varphi) dy ,$$

kjer smo z D označili širino reže. Sledi

$$\tilde{P}(R, \varphi, t) \approx \frac{C}{\sqrt{L}} \frac{\left[\cos\left(\omega t - kL + \delta' - \frac{kD \sin \varphi}{2}\right) - \cos\left(\omega t - kL + \delta' + \frac{kD \sin \varphi}{2}\right) \right]}{k \sin \varphi} ,$$

⁴Naj bo pravokotna oddaljenost točke, v kateri opazujemo valovanje od desnega ($y > 0$) roba reže, na primer enaka L . Oddaljenost levega roba reže od iste točke je torej enaka $R = \sqrt{L^2 + D^2} \approx L + \frac{1}{2} \frac{D^2}{L}$, kjer je $L \gg D$. Razlika v oddaljenosti enega in drugega roba reže od izbrane točke je torej $R - L \approx \frac{1}{2} \frac{D^2}{L}$. Če zahtevamo, da je $R - L = \frac{1}{2} \lambda$, sledi $\lambda L \approx D^2$. Za vse točke, za katere velja $\lambda L > D^2$, bomo rekli, da so na veliki oddaljenosti od reže in na teh oddaljenostih govorimo o Fraunhoferjevem uklonu.

kar lahko z uporabo trigonometrične formule za razliko kosinusov poenostavimo v

$$\tilde{P}(R, \varphi, t) \approx \frac{C D}{\sqrt{L}} \frac{\sin\left(\frac{k D \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{k D \sin \varphi}{2}} \sin(\omega t - kL + \delta') .$$

Gostota zvočnega toka ali jakost zvoka na oddaljenosti L je enaka

$$\bar{j}(\varphi) \approx \frac{C^2 D^2}{2 \rho c L} \left[\frac{\sin\left(\frac{k D \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{k D \sin \varphi}{2}} \right]^2 .$$

Množina zvočne energije dW/dz , ki v časovni enoti pade na enoto višine zaslona, ki je pravokoten na os x , je torej enaka

$$\frac{dW}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{j}(\varphi) \cos \varphi dy = \frac{C^2 D^2}{2 \rho c} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\sin\left(\frac{k D \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{k D \sin \varphi}{2}} \right]^2 d(\sin \varphi) ,$$

kjer smo upoštevali $y = L \tan \varphi \approx L \varphi$ in $dy = L d\varphi$. Vpeljimo novo spremenljivko $x = \frac{k D \sin \varphi}{2}$ in če še upoštevamo $k D \gg 1$, sledi

$$\frac{dW}{dz} = \frac{C^2 D^2}{2 \rho c} \cdot \frac{2}{k D} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{C^2 D}{2 \rho c} \cdot \frac{2 \pi}{k} .$$

Po drugi strani pa velja, da je množina zvočne energije, ki gre v časovni enoti skozi ploskovni element reže $D dz$, enaka $\frac{\tilde{P}_0^2}{2 \rho c} D dz$ ali

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\tilde{P}_0^2 D}{2 \rho c} = \frac{C^2 D}{2 \rho c} \cdot \frac{2 \pi}{k} ,$$

kar nam da

$$C = \frac{\tilde{P}_0}{\sqrt{\lambda}} .$$

V skladu z enačbami (4.68) in (4.69) sledi $\delta = \pi/4$, tako da imamo končni rezultat

$$\tilde{P}(R, \varphi, t) \approx \tilde{P}_0 \frac{D}{\sqrt{\lambda} L} \left[\frac{\sin\left(\frac{k D \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{k D \sin \varphi}{2}} \right] \sin(\omega t - kL) . \quad (4.70)$$

Primer 4.11: Vzemimo zelo visoko navpično ravno pregrado s širino D , na katero vpada v pravokotni smeri ravno zvočno valovanje $\tilde{P}(x, t) = \tilde{P}_0 \sin(\omega t - kx)$, os x smo usmerili vzdolž razširjanja valovanja. Določi obliko zvočnega valovanja za oviro!

Rešitev: Nalogo rešimo z uporabo Babinetovega načela (4.67) in rezultata (4.70). Enačbo (4.67) tako zapišemo

$$\tilde{P}(x, t) \approx \tilde{P}_0 \sin(\omega t - kx) - \tilde{P}_0 \frac{D}{\sqrt{\lambda} x} \frac{\sin\left(\frac{k D \sin \varphi}{2}\right)}{\frac{k D \sin \varphi}{2}} \sin(\omega t - kx) ,$$

kjer zahtevamo, da je $\lambda x \gg D^2$.

4.6 Absorpcija zvoka v snovi

Zaradi viskoznosti in prevajanja toplote se energija valovanja v tekočini spreminja v notranjo energijo tekočine. Pravimo, da se valovanje pri razširjanju skozi snov *absorbira*. Vzemimo ravno valovanje, ki se razširja vzdolž osi x . Absorpcijski koeficient μ zvočnega valovanja je definiran z enačbo

$$\bar{j}(x + dx) - \bar{j}(x) \equiv d\bar{j} = -2\mu \bar{j} dx$$

in

$$\bar{j}(x) = \bar{j}_0 e^{-2\mu x}, \quad (4.71)$$

kjer je $\bar{j}_0 = \bar{j}(x = 0)$. Ker je gostota energijskega toka sorazmerna s kvadratom amplitude pomikov, sledi, da le ta pojema z oddaljenostjo kot $e^{-\mu x}$. Podobna ugotovitev velja tudi za amplitudo nihanja tlaka ali gostote.

Račun pokaže⁵, da je absorpcijski koeficient μ v tekočinah enak

$$\mu = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) + \rho\chi(\gamma - 1) \right] \equiv a\omega^2,$$

kjer je η koeficient viskoznosti, ζ pa tako imenovana *druga viskoznost tekočine*. Nadalje je χ termična difuzivnost, $\gamma = c_P/c_V$ pa razmerje specifičnih toplot tekočine. Za idealne enoatomske pline velja $\zeta = -\frac{2}{3}\eta$ in če vzamemo, da velja ta zveza približno tudi za zrak, sledi

$$\mu_{\text{zrak}} \approx \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\frac{2}{3}\eta + \rho\chi(\gamma - 1) \right], \quad (4.72)$$

pri čemer si je treba zapomniti, da sta v plinih η in $\rho\chi$ istega reda velikosti. Iz gornjega izraza razberemo, da je absorpcija zvočnega valovanja v zraku, še posebej pri nizkih frekvencah, zanemarljiva. Z drugimi besedami, amplituda zvočnega valovanja se na razdalji ene valovne dolžine praktično nič ne spremeni. Namreč

$$\mu_{\text{zrak}} \lambda \approx \frac{\mu c}{\omega} \approx \frac{\eta \omega}{\rho c^2} \approx \frac{l \omega}{c} \approx \frac{l}{\lambda} \ll 1,$$

kjer je $l \approx \frac{\eta}{\rho c}$ povprečna prosta pot molekul v zraku in je majhna v primerjavi z valovno dolžino, kar smo utemeljili že na začetku tega poglavja o zvoku.

Primer 4.12: Ravno zvočno valovanje s frekvenco $\nu = 10^4 \text{ s}^{-1}$ se razširja v zraku s temperaturo 20°C . Za koliko se zaradi absorpcije zvoka v zraku zmanjšata jakost in zvočna raven na razdalji 10^3 m ?

Rešitev: Podatki za zrak pri navedeni temperaturi, ki jih potrebujemo, so: $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$, $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 1,4$, $\chi = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ in $c = 343 \text{ m/s}$. Podatke vstavimo v (4.72) in dobimo $\mu \approx 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ m}^{-1}\text{s}^2 \cdot \omega^2 \approx 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$. Iz enačbe (4.71) tako sledi

$$\frac{\bar{j}(x)}{\bar{j}_0} = e^{-2\mu x} \approx e^{-2} = 0,135.$$

⁵Landau, L.D., Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics*, Second Edition, Pergamon Press, 1987.

Na razdalji 1 km se zvočna raven torej zmanjša na vrednost

$$L(x) = 10 \log \left(\frac{I(x)}{I_{\min}} \right) = 10 \log \left(\frac{\bar{j}_0 e^{-2\mu x}}{I_{\min}} \right) = 10 \log \left(\frac{\bar{j}_0}{I_{\min}} \right) - (10 \cdot 2\mu x \log(e)) \approx L_0 - 10 \text{ dB} .$$

Za večino kapljev in je kvocient ζ/η pozitivno število. Za vodo, na primer, je $\zeta = 2,4 \eta$. Ker je za vodo $\gamma \approx 1$, sledi

$$\mu_{\text{voda}} \approx \frac{2\eta}{\rho c^3} \omega^2 .$$

Zvok se absorbira tudi pri odboju na trdnih površinah. To je zato, ker pri zvočnem valovanju v tekočini niha tudi temperatura. Ob površini sten se vzpostavi temperaturni gradient, ki poganja toplotni tok, ta pa povzroča izgubo energije valovanja. Dodatne izgube povzroča tudi viskoznost tekočine, kar ima za posledico, da tanka plast tekočine tik ob steni miruje. Ko valovanje vpada na steno poševno, ima tekočina ob steni tudi komponento hitrosti vzdolž stene v smeri razširjanja valovanja. Zaradi robnega pogoja (tanka plast tekočine tik ob steni miruje) se ob steni vzpostavi gradient tangentne komponente hitrosti tekočine, ki poganja tok gibalne količine (3.5) in to predstavlja dodatne izgube energije valovanja. Tako kakor v prejšnjem primeru gredo izgube mehanske energije valovanja na račun večanja notranje energije tekočine in stene.

4.7 Stoječe valovanje v zaprtih prostorih in odmevanje ali reverberacija⁶

Če je zvočni izvor v zaprtem prostoru, se zaradi odboja valovanja na stenah v prostoru slej ko prej vzpostavi stoječe valovanje. V tem primeru jakost zvoka v splošnem ne pojema več obratno sorazmerno s kvadratom oddaljenosti od točkastega izvora, kakor to velja za neomejeni prostor. Jakost zvoka je lahko na večjih razdaljah celo precej večja kakor v bližini izvora in na splošno je porazdelitev zvočne jakosti odvisna od oblike prostora.

Ko izvor vključimo, se v prostoru pravzaprav vzpostavita dve vrsti stoječega valovanja. Najprej imamo stoječe valovanje, ki ga vsiljuje izvor in katerega frekvenca je enaka frekvenci izvora. Hkrati se v prostoru vzbudi tudi stoječe valovanje, ki ga sestavljajo lastna nihanja; ta nihajo z lastnimi frekvencami, ki so odvisne od oblike in velikosti prostora. Zaradi absorpcije zvoka, predvsem na stenah, lastna nihanja slej ko prej zamrejo in v prostoru imamo po nekem določenem času le *vsiljeno stoječe valovanje*, ki ga vzdržuje izvor. Posamezna lastna nihanja si lahko predstavljamo kot nihanja nihal, ki jim zvočni izvor vsiljuje nihanje s frekvenco izvora. Tisto lastno nihanje, katerega lastna frekvenca je najbližja frekvenci izvora, je najmočnejše zastopano v vsiljenem stojećem valovanju.

Ko izvor izklopimo, začnejo lastna nihanja nihati z lastnimi frekvencami in hkrati počasi slabijo zaradi absorpcije zvoka v zraku (najprej tista z višjimi frekvencami) in še bolj zaradi absorpcije zvoka na stenah prostora. Ta časovno omejeni obstoj lastnih nihanj, potem ko smo zvočni izvor izklopili, imenujemo (*po*)*odmevanje* ali *reverberacija*.

Izvor običajno oddaja zvočna valovanja z različnimi frekvencami. Akustične lastnosti prostora morajo biti take, da so vsa zvočna valovanja, ki jih izvor oddaja, enako zastopana v stojećem valovanju,

⁶Morse P.M., *Vibration and Sound*, McGraw - Hill, 1948

ki se vzpostavi v prostoru, in da hkrati vedno prisotna, vendar časovno omejena lastna nihanja, preveč ne popačijo zvoka. To dosežemo tako, da stene skoraj v celoti absorbirajo zvok, ki pade nanje. Slaba stran takega pristopa je, da se pri tem jakost zvočnega valovanja v prostoru zaradi odsotnosti odboja močno zmanjša. Jakost zvoka je namreč v primerno oblikovanem prostoru prav zaradi odboja zvoka na stenah skoraj enakomerna po celem prostoru (razlike v ravni zvočne jakosti so le nekaj decibelov). Naloga inženirske akustike je torej določiti obliko prostora in absorpcijske lastnosti sten tako, da je moteč vpliv lastnih nihanj čim manjši in da se jakost zvoka ob tem ne zmanjša preveč.

Kakor smo že omenili, se zvok absorbira v zraku in na stenah prostora. Absorpcija v zraku je praviloma majhna, vendar je pri višjih frekvencah ($\nu \geq 10^4$ Hz) in v vlažnem zraku lahko precejšnja. Običajno velja, da smemo pri frekvencah, ki so manjše od približno $5 \cdot 10^3$ Hz, absorpcijo v zraku zanemariti in upoštevamo le absorpcijo zvoka na stenah prostora. Če vzamemo, da je porazdelitev jakosti zvoka po prostoru približno enakomerna in da so vse smeri razširjanja zvoka enakomerno zastopane, sledi, da je množina zvočne energije, ki se v časovni enoti absorbira na stenah, sorazmerna s površino sten. V nadaljevanju bomo te ugotovitve ponazorili s preprostim modelom.

Naj bodo frekvence zvoka, ki ga oddaja izvor, dovolj velike, tako da so ustrezne valovne dolžine majhne v primerjavi z linearnimi razsežnostmi prostora ($\nu \geq 10^3$ Hz $\rightarrow \lambda = c/\nu \leq 0,3$ m). V tem primeru se v prostoru vzpostavi veliko stoječih valovanj. Ker lahko stoječe valovanje zapišemo kot kombinacijo dveh harmoničnih valovanj, ki se razširjata v nasprotnih smereh, se pokaže, da lahko zvočno valovanje v vsaki točki prostora približno opišemo kot množico ravnih harmoničnih potujočih valovanj, pri katerih so vse smeri razširjanja enakomerno zastopane. Nihanje tlaka v poljubni točki prostora tako zapišemo

$$\tilde{P}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \tilde{P}_0(k^{-1}\vec{k}) \sin \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \delta \left(\frac{\vec{k}}{k} \right) \right), \quad (4.73)$$

kjer je ω frekvenca zvočnega valovanja in $k = \omega/c$. Amplituda $\tilde{P}_0$ posameznega harmoničnega valovanja je v splošnem odvisna tako od smeri razširjanja $\vec{k}$, kakor od lege $\vec{r}$. Za gostoto zvočne energije

$$\overline{w} = \frac{\overline{\tilde{P}^2}}{\rho c^2},$$

bomo privzeli, da je približno enakomerno porazdeljena po prostoru ($\overline{w} \cong \text{const}$). Ker so vse smeri razširjanja valovanj enakomerno zastopane, je gostota zvočnega toka prav tako enaka v vseh smereh (neto zvočni tok skozi poljubno orientirano ploskev je nič). Naj bo ploskev, skozi katero bomo izračunali zvočni tok, pravokotna na krajevni vektor $\vec{r}$. Delež $d\bar{j}$, ki ga prispeva valovanje z valovnim vektorjem $\vec{k}$, ki s krajevnim vektorjem $\vec{r}$ oklepa kot θ , je enak

$$d\bar{j} = \overline{w} c \cos \theta \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

in

$$\bar{j} = \frac{\overline{w} c}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{4} \overline{w} c. \quad (4.74)$$

S tem smo definirali jakost zvoka v točki s krajevnim vektorjem $\vec{r}$ v izbranem trenutku t .

Zaradi časovnega spreminjanja moči izvora $P(t)$ in zaradi absorpcije zvoka na stenah prostora sta tako $\bar{w}$ kakor tudi $\bar{j}$ odvisna od časa. Množina zvočne energije, ki se v časovni enoti absorbira na steni s površino S in absorpcijskim koeficientom α , je enaka $\alpha \bar{j} S$. Če imajo različne stene (oziroma deli sten) S_i različne absorpcijske koeficiente α_i , je zvočna energija, ki se absorbira v časovni enoti na stenah prostora, enaka

$$\sum_i \alpha_i \bar{j} S_i = \bar{j} \sum_i \alpha_i S_i \equiv a \bar{j} ,$$

kjer je *absorptivnost prostora* a definirana kot

$$a = \sum_i \alpha_i S_i .$$

Povprečna vrednost zvočne energije v prostornini V je enaka $\bar{W} = \bar{w} V$ ali če upoštevamo (4.74), $\bar{W} = 4 \frac{\bar{j}}{c} V$. Iz zakona o ohranitvi energije tako sledi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4V\bar{j}}{c} \right) = P(t) - a \bar{j} ,$$

kjer je $P(t)$ zvočna moč izvora, to je množina energije, ki jo izvor v časovni enoti odda v prostor v obliki zvočnega valovanja. Enačbo prepišemo v obliki

$$\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{ac}{4V} \bar{j} = \frac{c}{4V} P(t) , \quad (4.75)$$

in jo rešimo z nastavkom $\bar{j} = e^{-\frac{ac}{4V}t} f(t)$, pri pogoju $f(t \rightarrow -\infty) = 0$. Nastavek nesemo v enačbo (4.75) in dobimo

$$\bar{j}(t) = \frac{c}{4V} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{ac}{4V}(t-t')} P(t') dt' . \quad (4.76)$$

Iz gornjega rezultata sledi, da je jakost zvoka v danem trenutku v splošnem odvisna od celotne zgodovine moči izvora, kar je s stališča akustike prostora nesprejemljivo, vendar je po zaslugi eksponentnega faktorja pod integralom v resnici pomembna le moč izvora v intervalu $t - t' \approx \frac{4V}{ac}$. Ključna je torej velikost tega intervala glede na hitrost spreminjanja moči izvora. Če se na primer moč izvora v času $4V/ac$ ne spremeni zaznavno ($\frac{dP}{dt} \ll \frac{ac}{4V} P$), lahko zapišemo $P(t') \approx P(t)$ in imamo

$$\bar{j}(t) \approx \frac{P(t)}{a} . \quad (4.77)$$

Jakost zvoka v prostoru je obratno sorazmerna z absorptivnostjo prostora a , in kar je pomembno, sledi časovnemu spreminjanju izvora. Če torej želimo veliko zvočno jakost, mora biti absorptivnost prostora majhna. V nasprotnem primeru, ko se moč izvora spreminja hitro na časovni skali $4V/ac$, jakost zvoka v prostoru ne bo natančno sledila časovnemu spreminjanju izvora. Zvok, ki ga bomo slišali, bo popačen.

Če izvor zvoka nenadoma odstranimo, na primer v trenutku $t = 0$, potem se jakost zvoka pri $t > 0$ spreminja tako, kakor zahteva enačba

$$\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{ac}{4V} \bar{j} = 0 ;$$

Preglednica 4.2: Absorpcijski koeficient α za različne vrste sten

Snov	α					
	ν (Hz)					
	128	256	512	1024	2048	4096
opečna stena (nepleskana)	0,02	0,03	0,03	0,04	0,05	0,05
preproga	0,11	0,25	0,37	0,34	0,27	0,24
debele zavese	0,10	0,27	0,50	0,80	0,82	0,75
betonska tla	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02
lesena tla	0,05	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03

njena rešitev je

$$\bar{j}(t > 0) = \bar{j}_0 e^{-act/4V}, \quad (4.78)$$

kjer je $\bar{j}_0$ določen z enačbo (4.76), ko za zgornjo mejo integrala postavimo $t = 0$,

$$\bar{j}_0 = \frac{c}{4V} \int_{-\infty}^0 e^{\frac{act'}{4V}} P(t') dt'.$$

Pojav, ko zvok v prostoru ne sledi spreminjanju zvoka, ki ga oddaja izvor, in je zvok, ki ga slišimo, popačen ter razmazan, imenujemo *(po)odmevanje* ali *reverberacija*. Reverberacija je posledica dejstva, da raven zvočne jakosti v prostoru na pade na vrednost nič v trenutku, ko izvor preneha oddajati, ampak pojema linearno, tako kakor to zahteva enačba (4.78):

$$L = L_0 - 10 \left(\frac{act}{4V} \right) \log(e) \equiv L_0 - 4,34 \left(\frac{act}{4V} \right) \text{ dB}. \quad (4.79)$$

Linearno pojemanje ravni zvoka je značilno za prostore, v katerih je porazdelitev jakosti zvoka po prostoru bolj ali manj enakomerna, kakor smo predpostavili na začetku tega razdelka.

Naklonski koeficient premice (4.79) opredeljuje, kako natančno sledi porazdelitev zvoka v prostoru spreminjanju zvočnega valovanja, ki ga oddaja izvor. Čas, ki je potreben, da se raven zvoka zmanjša za 60 dB, potem ko smo izvor odstranili, se imenuje *reverberacijski čas* (čas odmevanja) t_R in je enak

$$t_R = \frac{60}{4,34} \left(\frac{4V}{ac} \right).$$

V zraku pri tlaku 1 bar in temperaturi 20 °C imamo

$$t_R = 0,161 \text{ m}^{-1} \text{ s} \left(\frac{V}{a} \right). \quad (4.80)$$

Če se zvok, ki ga oddaja izvor, spreminja počasi v primerjavi z reverberacijskim časom, potem jakost zvoka v prostoru natančno sledi spreminjanju moči izvora. V nasprotnem primeru, ko je časovno spreminjanje izvora hitro v primerjavi s približno $t_R/10$, pa zvok v prostoru ne more slediti izvoru.

Da zvok, ki ga poslušalci v prostoru zaznavajo, natančno sledi zvoku, ki ga oddaja izvor, mora biti reverberacijski čas kratek, ali kakor sledi iz enačbe (4.80), absorptivnost prostora a mora biti velika. Da hkrati ne zmanjšamo preveč zvočne jakosti (4.77), moramo za vsak prostor posebej izbrati optimalno vrednost absorptivnosti a . Za prostor velikosti $V \approx 300 \text{ m}^3$ je ustrezen reverberacijski čas okrog 1 s. Pri 100-krat večji prostornini pa mora biti reverberacijski čas vsaj 2 s, da bo zvočna jakost še vedno zadostna. Če je prostor namenjen govoru (predavalnice, kongresne dvorane itd.), je primeren reverberacijski čas okrog 1 s ne glede na velikost prostora. Pri večjih prostorih zato poskrbimo za ustrezno jakost zvoka s primerno postavitvijo zvočnikov. Če pa je prostor namenjen poslušanju glasbe, je reverberacijski čas lahko daljši in ne vpliva na kakovost zvoka. Velja namreč, da glasba v koncertni dvorani ne zveni dobro, če ni dovolj odmeva.

Čeprav gornje ocene temeljijo na predpostavki, da je porazdelitev zvočne energije po prostoru bolj ali manj enakomerna in izotropna, veljajo v glavnem tudi tedaj, ko ta predpostavka ne velja natančno. Hkrati smo z gornjimi enačbami pridobili kvantitativno oceno za enakomernost porazdelitve zvočne energije po prostoru. Če namreč raven zvočne jakosti, potem ko smo izvor izklopili, pojema linearno, je to znak, da je porazdelitev zvoka po prostoru enakomerna. V nasprotnem primeru, ko je časovni potek pojemanja ravni zvoka nelinearen, nam to pove, da porazdelitev zvočne energije po prostoru zagotovo ni enakomerna ali izotropna ali pa ne eno in ne drugo hkrati.

4.8 Hrup in zaščita pred hrupom

Hrup opredelimo kot neprijeten, nezaželen in preglasen zvok. Definicija je po naravi stvari subjektivna, kar je seveda razumljivo, saj se nanaša na ljudi kot sprejemnike zvoka. Najmanjši zvočni tlak, ki ga človeško uho zazna pri zvoku s frekvenco okrog 1 kHz, je $\tilde{P}_{min} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$, največji tlak, ki še ne povzroča bolečine, pa je približno 60 Pa. Ker meritev tlaka ni zahtevna, se za kvantitativno opredelitev hrupa uporablja tako imenovana *raven zvočnega tlaka* L_P , ki je definirana kot

$$L_P = 10 \log \left(\frac{\tilde{P}^2}{\tilde{P}_{min}^2} \right) \quad (4.81)$$

in jo izražamo v decibelih tako kakor raven zvočne jakosti. Instrument, s katerim merimo raven zvočnega tlaka L_P , imenujemo *sonomer* (to je merilnik zvočnega tlaka in ravni zvočnega tlaka). Sonomer ima vgrajen občutljiv mikrofonski element, ki neposredno zaznava $\sqrt{\tilde{P}^2}$. Če vzamemo $\sqrt{\tilde{P}^2} \approx 60 \text{ Pa}$, iz enačbe (4.81) sledi $L_P = 129,5 \text{ dB}$.

V podvodni akustiki opredeljujejo raven ali nivo tlaka enako, le s to razliko, da je referenčna vrednost $\tilde{P}_{min} = 10^{-6} \text{ Pa}$.

Raven zvočne jakosti, kot smo jo definirali v enačbi (4.35), lahko izrazimo s pomočjo ravni zvočnega tlaka L_P (4.81) na naslednji način. Pri ravnem potujočem valovanju ali pri kroglnem valovanju na večjih oddaljenostih od izvora velja enačba (4.34), to je

$$I = \frac{\tilde{P}^2}{\rho c},$$

Preglednica 4.3: Raven zvočnega tlaka za različne izvore

Raven zvočnega tlaka (dB) $\tilde{P}_{min} = 20 \mu\text{Pa}$	Izvor	Subjektivna ocena hrupa
140	izstrelitev rakete na oddaljenosti 100 m; topovsko streljanje neposredno ob topu	neznosno
120	ladijska strojnica; rock koncert neposredno ob zvočniku	neznosno
100	razni industrijski stroji	zelo hrupno
80	ob robu prometne avtoceste; kričanje	hrupno
60	trgovski center; restavracija; glasen govor	hrupno
40	mirno stanovanjsko naselje	mirno
20	snemalni studio	zelo mirno

kar nam da

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_{min}} \right) = 10 \log \left(\frac{\bar{\tilde{P}}^2}{\tilde{P}_{min}^2} \cdot \frac{\tilde{P}_{min}^2}{\rho c I_{min}} \right) = L_P + 10 \log \left(\frac{\tilde{P}_{min}^2}{\rho c I_{min}} \right) .$$

Upoštevamo

$$\frac{\tilde{P}_{min}^2}{\rho c I_{min}} = \frac{400 \text{ kg m}^{-3} \cdot \text{m s}^{-1}}{\rho c} ,$$

pa imamo

$$L = L_P + 26 \text{ dB} - 10 \text{ dB} \log \left(\frac{\rho c}{\text{kg m}^{-3} \text{ m s}^{-1}} \right) .$$

Pri temperaturi 20 °C je $c = 343 \text{ m/s}$, gostota zraka pri tlaku 1 bar in enaki temperaturi je $\rho = 1,204 \text{ kg/m}^3$, tako da v tem primeru med obema definicijama ni velike razlike,

$$L = L_P - 0,2 \text{ dB} .$$

Primer 4.13: Kolikšna je raven zvočnega tlaka, če zvočni tlak na danem mestu niha tako, kakor opisuje izraz

$$\tilde{P} = \sum_i \tilde{P}_i = \sum_i \tilde{P}_{0i} \sin(\omega t + \delta_i) .$$

Rešitev: Iz izraza za zvočni tlak sledi

$$\begin{aligned}\tilde{P}^2 &= \sum_i \tilde{P}_{0i}^2 \sin^2(\omega t + \delta_i) + 2 \sum_{i \neq j} \tilde{P}_{0i} \tilde{P}_{0j} \sin(\omega t + \delta_i) \sin(\omega t + \delta_j) \\ &= \sum_i \tilde{P}_{0i}^2 \sin^2(\omega t + \delta_i) + \sum_{i \neq j} \tilde{P}_{0i} \tilde{P}_{0j} [\cos(\delta_i - \delta_j) - \cos(2\omega t + \delta_i + \delta_j)] .\end{aligned}$$

Če vzamemo, da se fazni zamiki naključno spreminjajo od enega valovanja do drugega (taka valovanja imenujemo *nekoherentna*), sledi ($\overline{\tilde{P}^2} = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \tilde{P}^2 dt$, $t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$)

$$\overline{\tilde{P}^2} = \sum_i \overline{\tilde{P}_i^2} = \tilde{P}_{min}^2 \sum_i 10^{L_P^{(i)}/10} ,$$

kjer smo v zadnjem izrazu upoštevali definicijo (4.81). Raven zvočnega tlaka je torej enaka

$$L_P = 10 \log \left(\frac{\overline{\tilde{P}^2}}{\tilde{P}_{min}^2} \right) = 10 \log \left(\sum_i 10^{L_P^{(i)}/10} \right) .$$

Kot primer vzemimo tri nekoherentne izvore, ki oddajajo zvočna valovanja, katerih raven zvočnega tlaka je $L_P^{(1)} = 90$ dB, $L_P^{(2)} = 88$ dB in $L_P^{(3)} = 85$ dB. Iz prejšnjega izraza sledi

$$L_P = 10 \log \left(10^{90/10} + 10^{88/10} + 10^{85/10} \right) = 92,9 \text{ dB} .$$

Hrup lahko dodatno opredelimo še tako, da poleg ravni zvočnega tlaka navedemo tudi frekvenčno porazdelitev zvočnega valovanja. Glede na spektralno porazdelitev ločimo tri vrste hrupa:

1. hrup s črtastim spektrom,
2. hrup z zveznim spektrom,
3. hrup, ki nastane ob udarcih.

Hrup s črtastim spektrom je najpogostejša vrsta industrijskega hrupa, ki ga običajno povzročajo stroji z vrtečimi se deli. Tak je na primer hrup, ki ga povzročajo ventilatorji, rotacijske črpalke, kompresorji, motorji z notranjim izgorevanjem, transformatorji in tekoči trakovi. Tako ventilator, ki se vrti s frekvenco ν in ima n krakov, povzroča hrup z osnovno frekvenco $\nu_1 = n\nu$. Poleg osnovne frekvence so običajno prisotni tudi višji harmoniki $2\nu_1, 3\nu_1, \dots$, katerih amplitude pa so v splošnem precej manjše.

Hrup z zveznim spektrom je tudi pogosta oblika industrijskega hrupa, ki ga po navadi povzročajo curki zraka iz kompresorjev, curki pare in curki izgorelih plinov reaktivnih letal. Zvezni spekter pogosto vsebuje tudi jasno zaznavne diskretne frekvence, tako da imamo velikokrat opravka s hrupom, ki je kombinacija diskretnega in zveznega hrupa. Udarni hrup pa je značilen za razna pnevmatična kladiva, štanice in strelno orožje.

Ker je občutljivost človeškega očesa za zaznavanje zvoka odvisna od frekvence zvoka in manj tudi od amplitude zvočnega tlaka, zvoki z različnimi frekvencami za uho niso enakovredni. Merilniki zvoka so zato narejeni tako, da to občutljivost ušesa upoštevajo s primerno „utežjo“ izmerjene vrednosti ravni

Preglednica 4.4: A-uteži (filter A) oziroma popravki

Frekvenca (Hz)	A-popravek (dB)	Frekvenca (Hz)	A-popravek (dB)	Frekvenca (Hz)	A-popravek (dB)
10	−70,4	160	−13,4	2500	1,3
12,5	−63,4	200	−10,9	3150	1,2
16	−56,7	250	−8,6	4000	1,0
20	−50,5	315	−6,6	5000	0,5
25	−44,7	400	−4,8	6300	−0,1
31,5	−39,4	500	−3,2	8000	−1,1
40	−34,6	630	−1,9	10000	−2,5
50	−30,2	800	−0,8	12500	−4,3
63	−26,2	1000	0,0	16000	−6,6
80	−22,5	1250	0,6	20000	−9,3
100	−19,1	1600	1,0		
125	−16,1	2000	1,2		

zvočnega tlaka L_P . Največ je v rabi tako imenovano uteženje A ali na kratko „filter A”, ki pomeni, da izmerjeni vrednosti L_P odštejemo ali dodamo primerno število decibelov glede na frekvenco zvoka. Kolikšni so ti popravki, kaže preglednica 4.4 (popravki so dani za $\frac{1}{3}$ –oktavne ali terčne frekvenčne pasove). Če je na primer pri frekvenci 125 Hz izmerjena vrednost ravni zvočnega tlaka 90 dB, je ustrezna A-vrednost enaka 74 dB(A). A-vrednosti ravni zvočnega tlaka običajno označujemo z L_{AP} in oznaki za decibele v oklepaju dodamo oznako A, to je dB(A).

Primer 4.14: Za zvok s spektrom na spodnji tabeli določi raven zvočnega tlaka L_P (dB) in ustrezno vrednost L_{AP} (dB(A))!

Frekvenca (Hz)	31,5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000
L_P (dB)	95	95	90	85	80	81	75	70	65

Rešitev: Uporabimo tabelo 4.4 in imamo

A – popravek	−39,4	−26,2	−16,1	−8,6	−3,2	0,0	1,2	1,0	−1,1
L_{AP} (dB(A))	55,6	68,6	73,9	76,4	76,8	81,0	76,2	71,0	63,9

Da bomo določili L_P in L_{AP} , bomo vzeli, da so posamezna valovanja nekoherentna. Sledi

$$\begin{aligned}
 L_P &= 10 \log \left(\sum_i 10^{L_P^{(i)}/10} \right) = \\
 &= 10 \text{ dB} \log \left(10^{95/10} + 10^{95/10} + 10^{90/10} + 10^{85/10} + 10^{80/10} + 10^{81/10} + \right. \\
 &\quad \left. + 10^{75/10} + 10^{70/10} + 10^{65/10} \right) = 99,0 \text{ dB} .
 \end{aligned}$$

Na enak način dobimo

$$L_{AP} = 10 \text{ dB} \log \left(10^{55,6/10} + 10^{68,6/10} + 10^{73,9/10} + 10^{76,4/10} + 10^{76,8/10} + 10^{81,0/10} + 10^{76,2/10} + 10^{71,0/10} + 10^{63,9/10} \right) = 84,9 \text{ dB(A)} .$$

Prometni in industrijski hrup sta v splošnem odvisna od časa. V tem primeru je pomembno, da vemo, koliko časa traja neka raven hrupa. To opredelimo tako, da definiramo *ekvivalentno raven zvočnega tlaka* L_{PEQ} ,

$$L_{PEQ} = 10 \log \left(\frac{1}{T} \int_0^T 10^{L_P(t)/10} dt \right) ,$$

kjer je T primerno izbran časovni interval, na katerem želimo ovrednotiti raven zvočnega tlaka. Namesto ekvivalentne ravni zvočnega tlaka se zelo uporablja tudi tako imenovana raven L_{PX} , ki predstavlja tisto raven zvočnega tlaka, ki jo hrup preseže v X odstotkih obravnavanega časovnega intervala. Tu izstopata predvsem raven L_{P10} in raven L_{P90} . L_{P10} je raven zvočnega tlaka, ki jo hrup preseže v desetih odstotkih celotnega časa in predstavlja sorazmerno močan hrup, medtem ko je L_{P90} raven, ki pomeni prevladujoč hrup v danem okolju. Tako L_{PEQ} kot tudi L_{PX} običajno merimo z vključenim filtrom-A (L_{APEQ} , L_{APX}) in ju zato izražamo z dB(A).

Pri kontroli hrupa oziroma zaščiti pred hrupom je treba najprej določiti cilje, ki jih v danem okolju želimo doseči. V industrijskih obratih, na primer, želimo običajno izpolniti ta merila:

- nevarnost poškodbe sluha zaposlenih mora biti zmanjšana na sprejemljivo raven;
- če je le mogoče, je hrup treba omejiti tako, da še dopušča pogovor med udeleženci;
- na robu industrijskega območja mora biti raven hrupa sprejemljiva za okolico. Najenostavneje ga opredelimo s pomočjo ravni zvočnega tlaka ob upoštevanju A-poprakov.

Osnovno načelo pri zaščiti pred hrupom je, da zmanjšujemo hrup pri samem izvoru. To lahko dosežemo na različne načine: z modifikacijo izvora hrupa in spremembo načina delovanja naprave, ki hrup povzroča; z akustično izolacijo izvora; z opremo udeležencev z zvočno zaščito.

Poleg zgoraj omenjene tako imenovane *pasivne zaščite* pred hrupom se vedno bolj uporablja tudi *aktivna zaščita*. Bistvo tega je, da skušamo zmanjšati hrup z dodatnim zvočnim valovanjem, ki destruktivno interferira s prvotnim zvočnim valovanjem. Tako pride do izničenja hrupa na izbranem sorazmerno majhnem območju. Ker se pri interferenci energija zvočnega valovanja ne izniči, ampak se le prerazporedi po prostoru, to pomeni, da se ob izničenju hrupa na enem mestu poveča nekje drugje. Zato pri aktivni zaščiti govorimo o *lokalnem izničenju* hrupa. Ta način zaščite je še posebej primeren v letalih, kjer zadošča, da hrup zmanjšamo le tam, kjer so običajno glave potnikov. To dosežemo z majhnimi zvočniki, ki so vgrajeni v naslonjala za glave. Zvočnike računalniško krmilimo s pomočjo senzorjev, ki zaznajo hrup letalskih motorjev na različnih mestih v prostoru za potnike.

Z aktivno zaščito lahko zmanjšamo tudi hrup na samem mestu, kjer je izvor. Izvor sekundarnega zvočnega valovanja postavimo blizu izvora primarnega hrupa. Pri tem moramo izpolniti te pogoje: a)

Preglednica 4.5: Priporočene vrednosti ravni zvočnega tlaka okoljskega hrupa

Vrsta prostora	Priporočena raven zvočnega tlaka (dB(A))	Ustrezen reverberacijski čas praznega prostora za frekvenčni interval 500-1000 Hz (s)
predavalnica, konferenčna dvorana	30	0,06 za prostor s prostornino 300 m ³ do 1,4 za prostor s prostornino 5 · 10 ⁴ m ³
hodniki, avle	45	
čitalnica, knjižnica	40	0,7 – 0,8
pisarniški prostori, uradi	35	0,6 – 0,8
letališki terminali	45	
restavracije	40	
spalni prostori	25	

sekundarno zvočno valovanje mora imeti nasprotno fazo kakor primarni zvok; izvor sekundarnega valovanja mora biti približno enake velikosti kot izvor hrupa; razdalja med obema izvoroma mora biti majhna v primerjavi s karakteristično valovno dolžino zvoka.

V tem primeru lahko rečemo, da primarni izvor hrupa „poganja” sekundarni izvor. Primarni in sekundarni izvor sta nekakšen zaprt resonančni krog, tako da se skoraj nič zvočne energije ne razširja v okolico. V nasprotnem primeru, če sta oba izvora v fazi, pa je amplituda zvočnega valovanja, ki se razširja v okolico, dvakratna in skupna moč se poveča za faktor štiri. Moč enega in drugega izvora se torej poveča za faktor 2 v primerjavi z močjo, ki jo imata izvora, kadar sta vsaksebi.

Primer 4.15: *Vlak je sestavljen iz lokomotive in dvajsetih vagonov. Določi raven zvočnega tlaka na mestu poslušalca, katerega pravokotna oddaljenost od ravne železniške proge je $d = 100$ m. Za račun vzamemo, da so lokomotiva in vagoni nekoherentni točkasti izvori krogelnega valovanja, ki so med seboj razmaknjeni za $a = 19$ m. Zvočna moč vsakega od vagonov je $P_V = P_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^3$, kjer je $P_0 = 8,8$ W in $v_0 = 20$ m/s. Zvočna moč lokomotive je $P_L = P_V + 20$ W. Raven zvočnega tlaka določite za te hitrosti vlaka: $v = 60$ km/h, 70 km/h, $\dots$, 110 km/h, pri čemer upoštevajte $\bar{P}_{min} = 20 \cdot 10^{-6}$ Pa, gostota zraka pri 20°C je $1,204$ kg/m³ in hitrost zvoka je $c = 343$ m/s.*

Rešitev: Koordinatni sistem izberimo tako, da je os y vzdolž železniške proge in je poslušalec na osi x na razdalji d od koordinatnega izhodišča (slika 4.8). Za točkaste izvore velja, da je zvočna jakost na oddaljenosti r , ki je velika v primerjavi z valovno dolžino, enaka

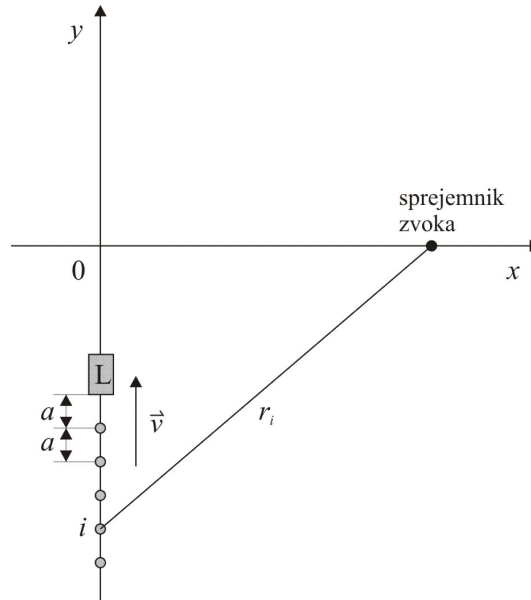
$$\bar{j} = \frac{\overline{\tilde{P}^2}}{\rho c} = \frac{P}{4\pi r^2},$$

kjer je P moč izvora, za katero vzamemo, da je stalna. Tako imamo

$$\overline{\tilde{P}^2} = \sum_i \overline{\tilde{P}_i^2} = \frac{\rho c}{4\pi} \sum_i \frac{P_i}{r_i^2}, \quad (4.82)$$

$P_i \ni P_V, P_L$, r_i je oddaljenost i -tega zvočnega izvora od poslušalca. Ker izvori ne mirujejo, je treba upoštevati tudi čas, ki ga zvočno valovanje potrebuje, da pride do poslušalca. Zvok, ki ga poslušalec sliši v trenutku t , je zapustil različne izvore v različnih trenutkih $t'_i < t$, za katere velja

$$\frac{r_i(t'_i)}{c} = t - t'_i. \quad (4.83)$$



Slika 4.22: Raven zvočnega tlaka, ki ga ustvarja vlak (lokomotiva L, sive pike označujejo središča vagonov), ki pelje s stalno hitrostjo v vzdolž osi y

Koordinato y i -tega izvora v trenutku t'_i izrazimo na naslednji način. Če označimo začetno lego lokomotive z y_{L0} , imamo

$$y_i(t'_i) = y_{L0} + v t'_i - i a = y_{L0} + v t - v(t - t'_i) - i a \equiv y_L - i a - v(t - t'_i),$$

kjer je $y_L = y_{L0} + v t$ lega lokomotive v trenutku t . Ker je hitrost svetlobe v zraku zelo velika ($3 \cdot 10^8$ m/s), je to lega, v kateri vidimo lokomotivo, ko zaslišimo zvok. Nadalje sledi

$$r_i^2(t'_i) = y_i^2(t'_i) + d^2 = (y_L - i a)^2 + d^2 + v^2 \Delta t_i^2 - 2 v (y_L - i a) \Delta t_i, \quad (4.84)$$

kjer smo označili $t - t'_i \equiv \Delta t_i$. Če kvadriramo enačbo (4.83), dobimo kvadratno enačbo za neznanko Δt_i , in sicer

$$(c^2 - v^2) \Delta t_i^2 + 2 v (y_L - i a) \Delta t_i - [(y_L - i a)^2 + d^2] = 0.$$

Rešitev zgornje enačbe, ki zadošča pogoju $\Delta t_i > 0$, je

$$c \Delta t_i = \frac{\sqrt{(y_L - i a)^2 + d^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v}{c} (y_L - i a)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.85)$$

Ker je kvocijent $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ pri izbranih vrednostih hitrosti vlaka kvečjemu enak $8 \cdot 10^{-3}$, ga smemo zanemariti v izrazu (4.85). Tako imamo

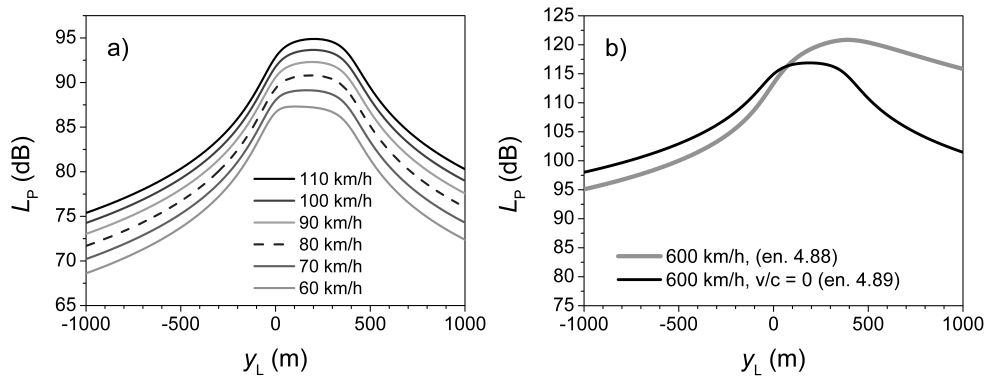
$$c \Delta t_i \approx \sqrt{(y_L - i a)^2 + d^2} - \left(\frac{v}{c}\right) (y_L - i a). \quad (4.86)$$

Izraz (4.86) vstavimo v (4.84) in zanemarimo vse člene, ki vsebujejo faktor $\frac{v}{c}$ na drugo ali višjo potenco, kar nam da

$$r_i^2(t'_i) \approx [(y_L - i a)^2 + d^2] - 2 \frac{v}{c} (y_L - i a) \sqrt{(y_L - i a)^2 + d^2}. \quad (4.87)$$

Raven zvočnega tlaka na mestu poslušalca v odvisnosti od lege lokomotive je tedaj enaka

$$L_P(y_L) = 10 \log \left(\frac{\bar{P}^2}{\tilde{P}_{min}^2} \right).$$



Slika 4.23: Raven zvočnega tlaka na mestu poslušalca v odvisnosti od lege lokomotive y_L ob upoštevanju končne hitrosti zvoka (enačba 4.88, slika a). V limiti $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ (enačba 4.89) ne dobimo omembe vredne razlike z grafom na sliki a, ker je pri obravnavanih hitrostih $v/c < 0,09$. Pri hitrih vlakih, ko so hitrosti tudi 600 km/h ($v/c = 0,5$), pa je razlika že očitna (slika b).

Ko upoštevamo (4.82) in (4.87), imamo

$$L_P(y_L) = 10 \log \left(\frac{P_V}{4 \pi d^2 \frac{\bar{P}_{min}^2}{\rho c}} \right) + 10 \log \left\{ \frac{P_L}{P_V} \left[\frac{d^2}{(y_L^2 + d^2) - 2 \frac{v}{c} y_L \sqrt{y_L^2 + d^2}} \right] + \sum_{i=1}^{20} \left[\frac{d^2}{(y_L - i a)^2 + d^2 - 2 \frac{v}{c} (y_L - i a) \sqrt{(y_L - i a)^2 + d^2}} \right] \right\}. \quad (4.88)$$

Če v zadnjem izrazu vzamemo $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, dobimo

$$\lim_{v/c \rightarrow 0} L_P(y_L) = 10 \log \left(\frac{P_V}{4 \pi d^2 \frac{\bar{P}_{min}^2}{\rho c}} \right) + 10 \log \left\{ \frac{P_L}{P_V} \left[\frac{d^2}{y_L^2 + d^2} \right] + \sum_{i=1}^{20} \left[\frac{d^2}{(y_L - i a)^2 + d^2} \right] \right\} . \quad (4.89)$$

Rezultat je prikazan v grafični obliki na slikah 4.23a,b. Vzemimo, da imamo samo lokomotivo in nas zanima, kje je lokomotiva v trenutku, ko slišimo najmočnejši zvok. Iz enačbe (4.83) sledi

$$\frac{r_L(t')}{c} = t - t' .$$

Zvok bo očitno najmočnejši tedaj, ko velja $r_L(t') = d$, kar nam da

$$\frac{d}{c} = t - t' \rightarrow \frac{v}{c} = \frac{v(t - t')}{d} = \frac{y_L(t)}{d} = \tan \theta ,$$

kjer je θ kot, ki ga veznica med poslušalcem in lokomotivo v trenutku t oklepa s pravokotnico na železniško progo.

Literatura

- [1] Barron R. F., *Industrial Noise Control and Acoustics*, Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [2] Bell L. H., Bell D. H., *Industrial Noise Control-Fundamentals And Applications*, Second Edition, Revised And Expanded, Marcel Dekker, Inc., 1994.
- [3] Bies D. A. and Hansen C. H., *Engineering Noise Control-Theory and Practice*, Third Edition, Spon Press, 2003.
- [4] Carslaw H. S. and Jaeger J. C., *Conduction of Heat in Solids*, Second Edition, Oxford University Press, 1986
- [5] Crank J., *Free and moving boundary problems*, Oxford University Press, 1984.
- [6] Crank J., *The Mathematics of Diffusion*, Second Edition, Oxford University Press, 1980.
- [7] Grimson J., *Advanced Fluid Dynamics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, 1971.
- [8] Krus M., *Moisture Transport and Storage Coefficients of Porous Mineral Building Materials*. Theoretical Principles and New Test Methods. Fraunhofer IRB Verlag, 1996.
- [9] Kuščer I., Kodre A., *Matematika v fiziki in tehniki*, DMFA, 1994.
- [10] Landau L. D. and Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics*, Second Edition, Pergamon Press, 1987.
- [11] Mehling H., Cabeza L. F., *Heat and cold storage with PCM – An up to date introduction into basics and applications*, Springer, 2008.
- [12] Morse P. M., *Vibration and Sound*, McGraw-Hill, 1948.
- [13] Rayleigh J. W. S., *The Theory of Sound*, Vol. I & II, Dover Publications, 1945.
- [14] Siegel R., Howell J. R., *Thermal radiation heat transfer*, McGraw-Hill, 1972.

Stvarno kazalo

A

A-filter 155
A-utež 155
absorpcija zvoka 147
absorpcijski koeficient 150
 stene (α) 150
 zvoka 147
absorptivnost (vpojnost) 42, 44, 57, 60
absorptivnost prostora (a) 150
agregatno stanje 73
amorfna snov 74
amplituda valovanja 119
anizotropne snovi 81

B

Babinetovo načelo 143, 146
Boltzmanova konstanta 58

C

Clausius-Clapeyronova enačba 78

Č

črno telo 43

D

decibel 128
delna gostota 83
delni tlak 83
difuzija 9, 79, 85
 termična 4, 92
difuzijska enačba 87

difuzijska upornost snovi 90
difuzijski koeficient 86
difuzijski tok
 gostota difuzijskega toka 86
dinamika kapilarnega dviga 101
 Washburnova enačba 104
disperzija 29

E

emisivnost 44
energija stoječega valovanja 125
energija valovanja 125
 gostota zvočne energije 125
energijski ali zvočni tok 126
 gostota energijskega toka 126, 147
energijski tok 42
 gostota energijskega toka (toplota) 46
 gostota energijskega toka s Sonca 57
entalpija 33, 77
entalpijska metoda 35
entropija 112

F

faktor - geometrijski 48
fasadna modluarna plošča 53
faza 34, 73
 tekoča 34
 trdna 34
faza valovanja 118
fazna hitrost 29
fazna sprememba 73
fazni diagram 73

fazno spremenljiva plast (FSP) 33
 meja med fazama 34
Fickov zakon 86
filter A 155
fotometrične količine 62
 osvetljenost 66, 67
 svetlnost 62
 svetlost (bleščavost) 63, 64
fotometrija 58, 62
Fourierjeva komponenta 123
Fourierjeva vrsta 123
Fraunhoferjev uklon 145
frekvenca valovanja 120
 karakteristična 120
 utripanja 140
funkcija stanja 77

G

geometrijska akustika 142
geometrijski faktor 48
gibalna količina
 gostota toka 101
gradient 123

H

harmonično nihanje (enačba) 20
hitrost svetlobe 58
hitrost zvočnega valovanja 111, 113, 118
 transverzalnega 117
hitrostni potencial 114
hrbti stoječega valovanja 122
hrup 152
 spekter 154
Huygens - Fresnelovo načelo 143

I

idealna tekočina 112
idealni plin 81
interferenca 126, 136
 destruktivna 140, 143
 konstruktivna 140
 krogelnih valovanj 138
interferirajoči (uklonski) val 142
izhlapevanje 79

izoterma 8
 idealnega plina 81
 realnega plina 81

J

jakost zvoka 125
 najmanjša 128
 največja 128
 raven zvočne jakosti 128

K

kapilarna kondenzacija 101
kapilarne sile 98
kapilarni
 dvig 99
 spust 99
kapilarni pojavi 95
karakteristične frekvence 120
Kirchhoffov zakon 43, 57
Knudsenovo število 89, 102
koncentracija 85
kondenzacija 75
kondenzacijska jedra 80, 84
konformna preslikava 17
konvekcija 1
 naravna 9
 vsiljena (prisiljena) 10
konvekcijski tok 4
kristal 74
kritična prostornina 80
kritična temperatura 80
kritična točka 80
kritični tlak 80
Kroneckerjev delta 21
krožna frekvenca valovanja 120
Kundtova cev 122
kvazistacionarno stanje 29, 35, 36

L

Laplaceov operator 123
Laplaceova transformacija 30
 v kartezičnih koordinatah 15
linearna superpozicija 136
lokalno izničenje hrupa 156

lom valovanja 131

lumen 61

M

masni tok 104

Poiseuillova formula 104

megla 84

mejna plast

laminarna 9

širina 11

termalna 9

mejni kot 97

mejni pogoji 130, 132

metastabilno stanje 80

mikrovalovi 58

močenje

popolno 98

stene 97

N

načelo linearne superpozicije 136

nekoherentna zvočila 129

nekoherentno valovanje 154

nestacionarni pojavi 18

nihajni čas 120

nihanje

enačba nihanja 20

lastne frekvence 123

lastno nihanje 120, 123

notranja energija 33, 77, 125

notranje trenje 101

O

občuteni svetlobni tok 61

odboj

difuzni 65

popolni 135

odboj valovanja

odbojni koeficient 133

odbojni zakon 132

odbojnost 132

operator Nabla 15, 123

optična prizma 61

osvetljenost 66

P

Papinov lonec 74

para

nasičena 75

nenasičena 75

prenasičena 80

Planckova konstanta 58

podhlajena para 80

podhlajena voda 80

Poiseuillova formula 104

poodmevanje 148, 151

povprečna prosta pot 89, 111

površinska energija 95

površinska napetost 79, 95

površinski pojavi 95

prag slišnosti 128

pregreta voda 79

prenos toplote 9

kondukcija 1

konstrukcijski sklop 16

konvekcija 1

sevanje 1

preseki za trke molekul 89

prestopni koeficient 10

prevajanje toplote (kondukcija) 1

v treh dimenzijah 15

R

radijski valovi 58

raven zvočne jakosti 128

raven zvočnega tlaka 152

ekvivalentna 156

raven L_{P10} , L_{P90} , L_{PX} 156

tabela 153

realni plin 81

relaksacijski čas 105

relativna barvna občutljivost (RBO) 61

rezonanca 137

reverberacija (poodmevanje) 148, 151

reverberacijski čas 151

robni pogoj 5, 16, 20, 120

rosa 84

S

Schwarz - Christoffelova transformacija 16, 17
 separacija spremenljivk 19
 sevalni energijski tok 42
 sevanje 1
 sevanje segrelih teles (termično) 42
 sipalni presek 89
 sipanje valovanja 142
 sivo telo 44
 slana 84
 sonomer 152
 spekter sevanja 57, 58
 spekter zvoka 141
 diskreten 142
 hrupa 154
 suma 142
 tona 141
 zvena 141
 zvezen 142
 stacionarno stanje 4, 5
 Stefan - Boltzmanova konstanta 44
 stisljivost
 adiabatna 112, 116
 izotermna 115, 116
 stoječe valovanje 117, 120
 lastne frekvence 120, 123
 strižna napetost, modul 95, 117
 sublimacija 82
 krivulja 82
 sveča (candle) 63
 svetilnost 62
 svetilo
 razsežno 67, 69
 točkasto 63, 67
 svetloba
 infrardeča 57, 58
 hitrost svetlobe 58
 ultravijolična 58
 vidna 58
 svetlobni izkoristek 62
 žarnice 63
 svetlobni tok 60
 občuteni 61
 svetlost 64

Š

šum 142
 število
 Grashofovo 10
 Knudsenovo 89, 102
 Nusseltovo 10
 Stefanovo 36

T

talilna krivulja 81, 82
 temperatura tališča 74
 temperaturni gradient 2, 15
 temperaturni skok (mejna plast) 12, 50
 termalni (termični) valovi 18, 29
 termična difuzija 92
 termična difuzivnost 4
 termično gibanje 42, 85
 tlak
 delni tlak 79, 83, 91
 izparilni 75
 nasičeni parni 75, 84
 ton 141
 toplota 77
 toplota pri faznih spremembah
 specifična izparilna 78
 specifična talilna 78
 toplotna prepustnost 5, 12
 toplotna prevodnost 2
 toplotna upornost 5
 toplotni prestopni koeficient 10
 empirične vrednosti 12
 toplotni tok 2, 17
 gostota 2
 toplotni tok skozi vogal 17
 transportni pojavi 101
 trojna točka 82

U

uklon 143
 Fraunhoferjev 145
 uklonski (interferirajoči) val 142
 uteženje A 155
 utripanje 140
 frekvenca utripanja 140

V

valovanje
 amplituda 119
 kinetična energija 125
 krogelno 130
 lomljeno 130
 longitudinalno 111, 117
 nekoherentno 154
 notranja energija 125
 odbito 130, 142
 prepuščeno 130
 ravno potujoče valovanje 117, 120
 razredčina 111
 sipano 142
 transverzalno 117
 vpadno 130
 zgoščina 111
 valovna dolžina 111, 119
 valovna enačba 111, 113
 valovna senca 142
 valovni vektor 123
 van der Waalsova enačba 82
 večplastni zid 5
 viskoznost 10, 101, 102
 dinamična 102
 druga 147
 kinematična 10, 102
 koeficient 102
 zraka 10
 vlažen zrak 83
 nasičeno vlažen 9, 84
 prenasičeno vlažen 84
 vlažnost
 absolutna 83
 relativna 83
 vozli stoječega valovanja 121
 vpojnost (absorptivnost) 42, 44, 57, 60
 vrelna jedra 79
 vrelna krivulja 74, 78, 82
 vsiljeno stoječe valovanje 148

Z

začetni pogoji 20
 zakon
 Fickov 86
 Kirchhoffov 43
 Lambertov 65
 lomni 132
 odbojni 132
 Planckov 58
 Stefan - Boltzmannov 43
 Wienov 60
 zakon o ohranitvi energije 2
 zakon o prevajanju toplote 2
 zakon termodinamike
 1. zakon termodinamike 3
 2. zakon termodinamike 1
 zaslon
 komplementaren, 143
 neprepusten 143
 zaščita pred hrupom
 aktivna 156
 pasivna 156
 zven 141
 jakost zvena 142
 zvočni tok 126
 zvok 111
 infrazvok 128
 jakost 127
 slišni 128
 ultrazvok 128

Ž

žarki
 gama 58
 rentgenski 58

W

Washburnova enačba 104